

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (06 نقاط)

I) a و b عدنان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،
النقط A, B, C و E التي لاحقاتها: $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$ على الترتيب.

1. أ- اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب- حدّد طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم تحقق أن $S(A) = E$.

ب- بين أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3. أ- احسب بدلالة a و b العبارة: $\left| z_C \right|^2 + \left| z_E \right|^2 - 2 \left| z_C \times z_E \right| \cos \left[\arg \left(\frac{z_E}{z_C} \right) \right]$.

ب- استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b .

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O ، لاحقتها z_n .

نضع: $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n ، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

1. اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسّي بدلالة a و b .

2. نفرض أن: $a < b$ و $\arg \left(\frac{z_{n+1}}{z_n} \right) \in]-\pi; \pi]$.

بين أن المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3. احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n ، حيث: $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$ ، ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

4. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O ، A و M_n في استقامية.

التمرين الثاني: (03 نقاط)

1. n عدد طبيعي . نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث : $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ - بين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب - ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$ ؟

ج - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.

2. أ - ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11 .

ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية :

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0; 0; 1)$ ، $B(2; 2; -1)$ ، $C(-2; -7; -7)$ و $D(-3; 4; 4)$

والمستوي $(\mathcal{P})$ المعرف بالتمثيل الوسيطى :

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 4 + \alpha + \beta \end{cases}$$
 ؛ α و β وسيطان حقيقيان .

1. أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا .

ب - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3; -2; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له .

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثم بين أن المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$ متعامدان .

ب - بين أن تقاطع (ABC) و $(\mathcal{P})$ هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطى :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

ج - احسب المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) ، والمسافة بين النقط D والمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثم استنتج المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ) .

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقط D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و $(\mathcal{P})$.

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب - بين أن المستويات الثلاثة (ABC) ، $(\mathcal{P})$ و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثم عين إحداثيات H .

ج - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ) .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I - 1. الدالة u معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$.

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $e^x - e > 3x - 4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$.

أ - بين أن: $v'(1) = 0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب - أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $v(x) \leq 0$.

ج - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $\frac{-1 + \ln x}{x^2} \leq 3x - 4$.

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $e^x - e + \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x}$.

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2. بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثم ممّثل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left]0; \frac{5}{2}\right]$.

(نأخذ: $f(2) \approx 2,3$ ، $f(1,64) \approx 1$ ، و $f\left(\frac{5}{2}\right) \approx 5,75$).

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$x = 2$ و $x = \frac{1}{2}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

1. أ - عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$.
 ب - عيّن الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b - a)(a + b) = 24$.
 ج - استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.
2. α و β عدنان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha = \overline{10141}$ و $\beta = \overline{3403}$
 أ - اكتب العددين α و β في النظام العشري.
 ب - عيّن الثنائية $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:
$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$
3. أ - عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.
 ب - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية: $2013x - 1434y = 27$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z ، التالية: $z^2 + z + 1 = 0$.
2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ النقطة A ، B و M ذات اللاحقات:

$$z_A = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z \text{ و } z \text{ على الترتيب. (يرمز } \bar{z}_A \text{ إلى مرافق } z_A)$$
 أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي.
 ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[(z - z_A)^2\right] = \arg(z_A) - \arg(z_B)$
3. أ - التحويل النقطي r ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z)$ ، حيث: $z' = z_A \cdot z + z_B \sqrt{3}$.
 - ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.
 ب - التحاكي h ، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z)$ ، حيث: $z' = -2z + 3i$.
 - عيّن نسبة ومركز التحاكي h .
 ج - نضع: $S = h \circ r$ (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).
 - عيّن طبيعة التحويل S ، مبرزاً عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي: $z' = 2e^{\frac{\pi}{3}}(z - i) + i$.
4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ؛ حيث: $S(O) = C$ ، $S(C) = D$ و $S(D) = E$.
 - بين أن النقط O ، Ω و E في استقامة.
5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z = 2e^{i\theta} + e^{\frac{i\pi}{2}}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
 ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(1;1;1)$

$$\text{والمستقيم } (\Delta) \text{ المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=-2 \\ z=-1-\alpha \end{cases} \text{ حيث } (\alpha \in \mathbb{R}).$$

1. أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .
- ب - بين أن المستقيمين (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
2. $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ) .
- أ - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي $(\mathcal{P})$.
- ب - أثبت أن $x - y + z - 1 = 0$ ، هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.
3. لتكن N نقطة من المستقيم (Δ) و M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1+2\beta; 1+\beta; 1-\beta)$ مع $(\beta \in \mathbb{R})$.
- أ - بين أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB) .
- ب - جد إحداثيات النقطتين M و N حتى تكون M المسقط العمودي للنقطة N على المستوي $(\mathcal{P})$.
- ج - تحقق أن المسافة بين N و $(\mathcal{P})$ هي $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، ثم احسب مساحة المثلث ABN .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.
1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
- ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1-\sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1+\sqrt{2}) \approx 1,43$)
2. أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والآخر α ، حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.
- ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .
- II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.
- $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2 cm)
1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.
- ج - ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ، (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)
- ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)
3. أ - بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.
- ب - مثل (Δ) والمماسين والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

ج - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

4. الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$.

أ - بين أن H دالة أصلية للدالة: $(x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$.

III - (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(تذكر أن العدد α يحقق $g(\alpha) = 0$)

1. برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$.

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أن (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.