



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

- (1) أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- (3) اكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left(\frac{12}{5^2}\right)^{n+1}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين A و B حيث: A : " سحب كريتين من نفس اللون " ، B : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

(1) بين أن احتمال الحادثة A هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة B .

(2) علما أن الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملان نفس الرقم؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - i)(z^2 - 4z + 5) = 0$.



II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B

و C التي لاحقاتها $i, 2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

(1) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع $f(z) = \frac{iz - 1 - 2i}{2z - 4 - 2i}$

(أ) عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|f(z)| = \frac{1}{2}$

(ب) بيّن أن العدد $[f(i)]^{1440}$ حقيقي موجب.

(3) نعتبر الدوران r الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(أ) عين لاحقة D صورة B بالدوران r وبيّن أن النقط A, D و C في استقامية.

(ب) استنتج أن D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0; 2[\cup]2; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

(3) نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية التيبيرية "ln" في المعلم السابق.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ) .

(4) ارسم بعناية المنحنى (Γ) ثم المنحنى (C_f) .

(5) H الدالة المعرفة على المجال $]3; +\infty[$ بـ : $H(x) = \int_3^x \ln(t) dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x .

(ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل

والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$.

(6) g الدالة المعرفة على $]-1; 0[\cup]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = f(-2x)$

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكرات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آنٍ واحدٍ ثلاث كريات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة.
- (1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.
 - (2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.
 - (3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع. ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداءهما زوجي؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- f الدالة المعرفة على المجال $[4; 7[$ بـ: $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$.
- (1) أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[4; 7[$.
ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) \in [4; 7[$.
 - (2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) - x = \frac{-x^2 + 9x - 14}{x - 4 + \sqrt{x+2}}$.
ثمّ استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4; 7[$ فإنّ $f(x) - x > 0$.
 - (3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 \leq u_n < 7$.
ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ بيّن أنّها متقاربة.
 - (4) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.
ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ، ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها z_A ، z_B و z_C على الترتيب حيث:
- $$z_C = -2z_A \text{ و } z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$
- (1) أ) اكتب العدد المركب z_A على الشكل الأسّي.
 - ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.



- (2) أ) الانسحاب الذي يحوّل A إلى C ، عيّّن z_D لاحقة النقطة D صورة B بالانسحاب T .
 ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.
 (3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي.
 (4) جد قيم العدد الطّبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.
 (5) لتكن M نقطة كيميّة من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .
 عيّّن (E) مجموعة النّقط M التي من أجلها يكون $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. تُؤخذ وحدة الطول $2cm$

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

- (1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
 ب) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.
 (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f .
 (3) احسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
 (4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على $\mathbb{R}$.
 (5) ارسم على المجال $[0; 2]$ المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في نفس المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)
 (6) احسب بالسنتمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.
 (7) h الدالة المعرّفة على المجال $[-2; 2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
 ب) من أجل $x \in [0; 2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقاً من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني