

مسألة شاملة

مسألة شاملة: دراسة دالة أسية بمقاريين مائلين

تمرينان مستقلان على نمط امتحان البكالوريا: الأول مسألة دراسة دالة أسية كاملة (نهايات، مستقيمات مقاربة، مشتقة، جدول تغيرات، مماس، مركز تناظر، حل المعادلة $f(x)=0$ بمبرهنة القيم المتوسطة ورسم)، والثاني قصير لتعيين وسيطين. المدة المقترحة: ثلاث ساعات.

★★★

التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة أسية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول: النهايات والمستقيمات المقاربة

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبيّن أن المستقيم $y = x - 1$: (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ_1) .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. بيّن أن $f(x) - (x + 3) = \frac{-4e^x}{e^x + 1}$ ثم استنتج أن المستقيم $y = x + 3$: (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ وادرس الوضعية النسبية.

الجزء الثاني: التغيرات والمماس والتناظر

(3) بيّن أن $f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

(4) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. بيّن أن (C_f) يخترق (T) عند هذه النقطة.

(5) بيّن أن $f(x) + f(-x) = 2$ من أجل كل x . ماذا تستنتج هندسيًا بالنسبة إلى النقطة $A(0; 1)$ ؟

الجزء الثالث: حل المعادلة $f(x) = 0$

(6) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α وأن $-2.8 < \alpha < -2.7$ (استعمل جدول قيم).

(7) استنتج من السؤال 5 أن المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلًا وحيدًا β ، أظّره.

الجزء الرابع: الرسم والمناقشة

(8) ارسم (Δ_1) و (Δ_2) و (T) و (C_f) على المجال $[-6; 6]$.

(9) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

☆☆☆

التمرين الثاني — تعيين وسيطين ودراسة دالة

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \frac{ae^x + b}{e^x + 1}$ حيث a و b عدنان حقيقيان. نعلم أن (C_g) يقبل المستقيم $y = 3$ مقاربًا بجوار $+\infty$ وأنه يمر بالنقطة $A(0; 1)$.

(1) عيّن a و b .

(2) من أجل $a = 3$ و $b = -1$: احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ وبيّن أن g متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

3 حل المعادلة $g(x) = 1$ ثم المعادلة $g(x) = 2$ (استعمل $\ln$).

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة أسية

الجزء الأول

1) $e^x \rightarrow +\infty$ ف $\frac{4}{e^x + 1} \rightarrow 0$ و $x - 1 \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $f(x) - (x - 1) = \frac{4}{e^x + 1} \rightarrow 0$ فالمستقيم $y = x - 1$: (Δ_1) مقارب مائل. وبما أن $\frac{4}{e^x + 1} > 0$ فالمنحنى (C_f) فوق (Δ_1) على $\mathbb{R}$.

2) $e^x \rightarrow 0$ ف $\frac{4}{e^x + 1} \rightarrow 4$ و $x - 1 \rightarrow -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ونحسب:

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 3) &= \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} \\ &= \frac{-4e^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

وهذه العبارة تؤول إلى 0 عندما $x \rightarrow -\infty$ (لأن $e^x \rightarrow 0$) فالمستقيم $y = x + 3$: (Δ_2) مقارب مائل بجوار $-\infty$. و $\frac{-4e^x}{e^x + 1} < 0$ فالمنحنى (C_f) تحت (Δ_2) على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني

3) $f'(x) = 1 + 4 \times \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$ ف $f'(x) \geq 0$ و $f'(x) = 0$ فقط عند $x = 0$ إذن f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$. $f(0) = -1 + 2 = 1$.

$-\infty$	0	$+\infty$	x
+	0	+	$f'(x)$
$-\infty$	1	$+\infty$	$f(x)$

4) $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ ف $(T) : y = 1$ (أفقي). بما أن f متزايدة تمامًا و $f(0) = 1$: إذا كان $x < 0$ و $f(x) < 1$: إذا كان $x > 0$ و $f(x) > 1$: إذا كان $x > 0$ فالمنحنى تحت (T) على اليسار وفوقه على اليمين : (C_f) يخترق (T) عند $A(0; 1)$ نقطة انعطاف.

5) $f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x - 1 + \frac{4e^x}{1 + e^x}$ إذن:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= -2 + \frac{4}{e^x + 1} + \frac{4e^x}{e^x + 1} \\ &= -2 + \frac{4(1 + e^x)}{e^x + 1} = 2 \end{aligned}$$

أي $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$: النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

الجزء الثالث

6) f مستمرة ومتزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ فصورة $\mathbb{R}$ هي $\mathbb{R}$ ولـ 0 سابق وحيد α . جدول قيم:

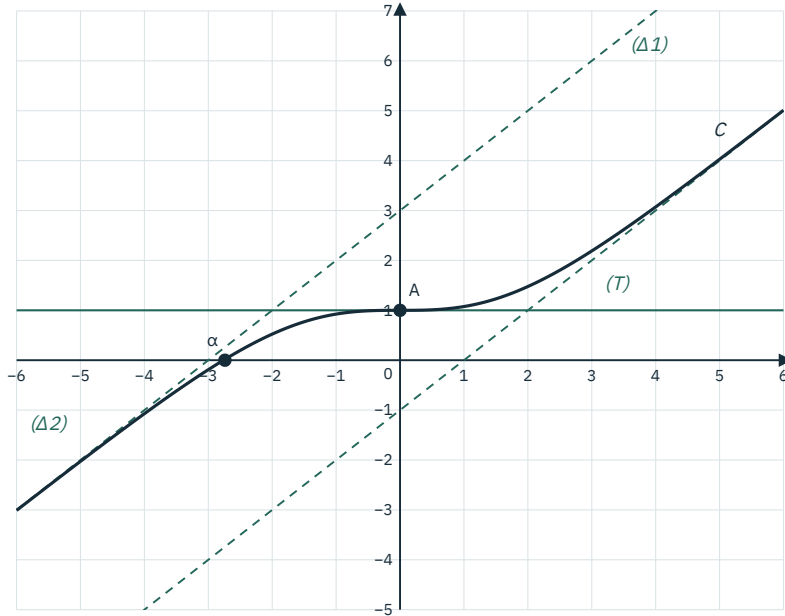
-3	-2.8	-2.7	-2.5	-2	x
-0.1897	-0.0293	0.0481	0.1966	0.5232	$f(x)$

$f(-2.8) < 0 < f(-2.7)$ و f متزايدة تمامًا إذن $-2.8 < \alpha < -2.7$.

7) من السؤال 5: $f(-x) = 2 - f(x)$. من أجل $x = \alpha$ يكون $f(-\alpha) = 2 - f(\alpha) = 2$. فالعدد $-\alpha$ حل للمعادلة $f(x) = 2$ وهو وحيد لأن f متزايدة تمامًا. من $-2.8 < \alpha < -2.7$ نجد $2.7 < -\alpha < 2.8$.

الجزء الرابع

8) الرسم (المركز A ظاهر على المنحنى):



9) f مستمرة ومتزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ وتأخذ كل القيم الحقيقية من $-\infty$ إلى $+\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي m للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

حل التمرين الثاني — تعيين وسيطين ودراسة دالة

1) $g(x) = \frac{a + be^{-x}}{1 + e^{-x}} \rightarrow a$ عندما $x \rightarrow +\infty$ فالشرط الأول يعطي $a = 3$ و $g(0) = \frac{a+b}{2} = 1$ ف $a + b = 2$ ومنه $b = -1$ إذن $g(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

2) عند $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ ف $g \rightarrow \frac{-1}{1} = -1$ مقارب بجوار $y = -1$. المشتقة:

$$g'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - (3e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

3) $g(x) = 1 \iff 3e^x - 1 = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$

$g(x) = 2 \iff 3e^x - 1 = 2e^x + 2 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3 \approx 1.099$