

سلسلة تمارين 3

الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

تذكير: دالة f مستمرة عند a إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. مبرهنة القيم المتوسطة: إذا كانت f مستمرة على $[a; b]$ و k بين $f(a)$ و $f(b)$ فالمعادلة $f(x) = k$ تقبل حلاً على الأقل في $[a; b]$ ؛ وإذا كانت f رتيبة تماماً على $[a; b]$ فالحل وحيد.

☆☆★

التمرين 1 — وسيط يضمن الاستمرارية

(1) f دالة معرفة بـ: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ إذا كان $x \neq 2$ و $f(2) = m$. عيّن m حتى تكون f مستمرة عند 2.

(2) g دالة معرفة بـ: $g(x) = x^2 + ax + 1$ إذا كان $x \leq 1$ و $g(x) = 3x - 1$ إذا كان $x > 1$. عيّن a حتى تكون g مستمرة عند 1.

☆☆★

التمرين 2 — الاستمرارية عند نقطة

ادرس استمرارية كل دالة عند العدد المشار إليه:

(1) $f(x) = 2x + 1$ إذا كان $x < 1$ و $f(x) = x^2 + 2$ إذا كان $x \geq 1$ ، عند 1.

(2) $h(x) = x + 2$ إذا كان $x < 0$ و $h(x) = x^2 + 1$ إذا كان $x \geq 0$ ، عند 0.

(3) $k(x) = E(x)$ (الجزء الصحيح للعدد x)، عند 1.

☆☆★

التمرين 3 — الاستمرارية على مجال

علّل استمرارية كل دالة على مجموعة تعريفها بعد تعيينها:

(1) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - x - 2}$

(2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

(3) $h(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$

☆☆★

التمرين 4 — ثلاثة حلول لمبرهنة القيم المتوسطة

$p(x) = x^3 - 3x + 1$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

(1) احسب $p(-2)$ و $p(-1)$ و $p(0)$ و $p(1)$ و $p(2)$.

(2) بيّن أن المعادلة $p(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول على الأقل في $\mathbb{R}$ ثم أنه لا يوجد أكثر من ثلاثة.

(3) أعط مجالاً يوطر كل حل.

★★★

التمرين 5 — حل وحيد وتأثيره

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 2x - 4$.

(1) بين أن f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ (دون استعمال المشتقة).

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α في $\mathbb{R}$.

(4) بين أن $1 < \alpha < 2$ ثم عيّن بجدول قيم تأطيرًا للعدد α سعته 10^{-2} .

(5) استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

☆☆☆

التمرين 6 — حل المعادلة $x = \cos x$

f دالة معرفة على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بـ: $f(x) = x - \cos x$.

(1) بين أن f مستمرة ومتزايدة تمامًا على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (علّمًا أن $\cos$ متناقصة تمامًا على هذا المجال).

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ أي $x = \cos x$ تقبل حلًا وحيدًا α في $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(3) جد تأطيرًا للعدد α سعته 10^{-1} بجدول قيم.

☆☆☆

التمرين 7 — عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، جدول تغيراتها (معطى) كما يلي:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

جدول تغيرات f (معطى)

عيّن، مع التبرير، عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ في كل حالة: $m = -2$ ثم $m = -1$ ثم $m = 0$ ثم $m = 3$ ثم $m = 5$.

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — وسيط يضمن الاستمرارية

1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4\end{aligned}$$

f مستمرة عند 2 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ أي $m = 4$.

2

• قيمة الدالة: $g(1) = 1 + a + 1 = a + 2$.

• النهاية من اليسار: $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = a + 2$.

• النهاية من اليمين: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3(1) - 1 = 2$.

الاستمرارية عند 1 تعني تساوي النهايتين مع $g(1)$:

$$a + 2 = 2$$

$$a = 0$$

حل التمرين 2 — الاستمرارية عند نقطة

1

• $f(1) = 1 + 2 = 3$.

• من اليسار: $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3$.

• من اليمين: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3$.

النهايتان متساويتان وتساويان $f(1)$ إذن f مستمرة عند 1.

2

• $h(0) = 1$.

• من اليسار: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2$.

• من اليمين: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$.

النهايتان مختلفتان إذن h غير مستمرة عند 0 (قفزة قيمتها 1 في المنحنى).

3

• $E(1) = 1$.

- من اليمين: من أجل $x \in [1; 2[$ يكون $E(x) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$.
 - من اليسار: من أجل $x \in [0; 1[$ يكون $E(x) = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.
- إذن k غير مستمرة عند 1 (مستمرة من اليمين فقط).

حل التمرين 3 — الاستمرارية على مجال

1

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ إذن $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ ينعدم عند -1 و 2 .
- f حاصل قسمة دالتين كثيري حدود فهي ناطقة، ومستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- المجالات: $]-\infty; -1[$ ثم $]2; +\infty[$.

2

المقام $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ لا ينعدم أبدًا ف $D_h = \mathbb{R}$. البسط $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وحاصل قسمة دالتين مستمرتين مقامها لا ينعدم مستمر: h مستمرة على $\mathbb{R}$.

3

المقام $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ لا ينعدم أبدًا ف $D_h = \mathbb{R}$. البسط $\cos$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وحاصل قسمة دالتين مستمرتين مقامها لا ينعدم مستمر: h مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 4 — ثلاثة حلول بمبرهنة القيم المتوسطة

1

-2	-1	0	1	2	x
-1	3	1	-1	3	$p(x)$

مثال: $p(-2) = (-8) + 6 + 1 = -1$ و $p(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ و $p(2) = 8 - 6 + 1 = 3$.

2

p كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

على $[-2; -1]$: $p(-2) = -1 < 0 < 3 = p(-1)$ فبمبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل $\alpha_1 \in]-2; -1[$.

على $[0; 1]$: $p(0) = 1 > 0 > -1 = p(1)$ فيوجد حل $\alpha_2 \in]0; 1[$.

على $[1; 2]$: $p(1) = -1 < 0 < 3 = p(2)$ فيوجد حل $\alpha_3 \in]1; 2[$.

هذه المجالات منفصلة، فالحلول $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ مختلفة. ولأن p كثير حدود من الدرجة 3 فلها ثلاثة جذور على الأكثر. إذن للمعادلة بالضبط ثلاثة حلول.

3

$-1 < \alpha_1 < -2$ و $0 < \alpha_2 < 1$ و $1 < \alpha_3 < 2$.

حل التمرين 5 — حل وحيد وتأطيره

1

الدالة $x \mapsto x^3$ متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ والدالة $x \mapsto 2x$ متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ ، ومجموع دالتين متزايدتين تمامًا متزايد تمامًا. والثابت -4 لا يغير الرتبة. إذن f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

2

$f(x) = x^3 + 2x - 4$ نهايتها عند $\pm\infty$ هي نهاية حدها الغالب x^3 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3

f مستمرة (كثير حدود) ومتزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[= f(\mathbb{R})$ (من النهايتين). والعدد 0 ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، فحسب مبرهنة القيم المتوسطة (حالة دالة رتيبة تمامًا) للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α .

4

بخطوة 0.1 ثم 0.01: $f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0$ و $f(2) = 8 + 4 - 4 = 8 > 0$ ، و $f(1) < 0 < f(2)$ ف $1 < \alpha < 2$. نحسب جدول قيم

x	1.18	1.17	1.2	1.1	1
$f(x)$	0.0030	-0.0584	0.1280	-0.4690	-1.0000

$f(1.1) < 0 < f(1.2)$ إذن $1.1 < \alpha < 1.2$. ثم $f(1.17) < 0 < f(1.18)$ إذن:

$$1.17 < \alpha < 1.18$$

وهذا تأطير سعته 10^{-2} .

5

f متزايدة تمامًا و $f(\alpha) = 0$ إذن:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

$$f(x) < 0 \text{ على }]-\infty; \alpha[\text{ و } f(x) > 0 \text{ على }]\alpha; +\infty[.$$

حل التمرين 6 — حل المعادلة $x = \cos x$

1

$x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$ ف f مستمرة. $\cos$ متناقصة تمامًا على $[0; \frac{\pi}{2}]$ ف $-\cos$ متزايدة تمامًا، ومجموع x (متزايدة تمامًا) و $-\cos x$ متزايدة تمامًا، إذن f متزايدة تمامًا.

2

الدالة f مستمرة ومتزايدة تمامًا والعدد 0 محصور بين $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$ و $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$.
فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ (مبرهنة القيم المتوسطة).

3

0	0.7	0.8	x
-1	-0.0648	0.1033	$f(x)$

$f(0.7) < 0 < f(0.8)$ إذن $0.7 < \alpha < 0.8$ (آلة حاسبة بالراديان).

حل التمرين 7 — عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

نقسم $\mathbb{R}$ إلى ثلاثة مجالات تكون فيها f مستمرة ورتيبة تمامًا ونحدد صورة كل مجال:

(1) $f(I_1) =]-\infty; 3]$ متزايدة تمامًا، $f(I_1) =]-\infty; 3]$

(2) $f(I_2) = [-1; 3[$ متناقصة تمامًا من 3 إلى -1، $f(I_2) = [-1; 3[$

(3) $f(I_3) =]2; +\infty[$ متزايدة تمامًا، $f(I_3) =]2; +\infty[$

على كل مجال، المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلًا وحيدًا إذا كان m في صورة المجال، وإلا لا حل. فنعد:

-2	-1	0	3	5	m
نعم	نعم	نعم	نعم	لا	$m \in f(I_1)?$
لا	نعم	نعم	لا	لا	$m \in f(I_2)?$
لا	لا	نعم	نعم	نعم	$m \in f(I_3)?$
1	2	3	2	1	عدد الحلول

مثال $m = -1$: حل في I_1 وآخر هو $x = 2 \in I_2$ (لأن $f(2) = -1$) ولا حل في I_3 لأن $-1 \notin]2; +\infty[$.

مثال $m = 3$: $x = 0 \in I_1$ حل، ولا حل في I_2 لأن $3 \notin [-1; 3[$ ، وحل في I_3 .