

سلسلة تمارين

التزايد المقارن: القوى والجذر النوني والدالة $x \mapsto a^x$ والنهيات

من أجل $a > 0$ وعدد حقيقي b : $a^b = e^{b \ln a}$. ومن أجل $n \geq 1$: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. قواعد القوى: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x+y} = a^x a^y$.
الدالة $x \mapsto a^x$ مشتقتها $(\ln a) a^x$: متزايدة إذا كان $a > 1$ ومتناقصة إذا كان $0 < a < 1$.
نهيات التزايد المقارن ($n \geq 1$ طبيعي): $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

☆☆★

التمرين 1 — القوى الحقيقية

(1) احسب بدون آلة حاسبة: $8^{2/3}$ و $16^{-3/4}$ و $27^{4/3}$ و $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2}$.

(2) بسط $3^{-1/3} \times 9^{2/3}$.

(3) رتب تصاعدياً الأعداد $2^{\sqrt{2}}$ و $2^{1.5}$ و $2^{\pi/2}$ ثم قارن $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}$.

(4) اكتب $2^{\sqrt{3}}$ بدلالة e ثم أعط قيمة مقربة بالآلة.

☆☆★

التمرين 2 — الجذر النوني

(1) احسب: $\sqrt[4]{81}$ و $\sqrt[3]{125}$ و $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.

(2) بين أن $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$ وأن $\sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2}$ وأن $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = 2$.

(3) بسط $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

(4) قارن $\sqrt[3]{5}$ و $\sqrt[4]{7}$ (يمكنك رفع العددين إلى القوة 12).

☆☆★

التمرين 3 — معادلات ومتراجحات أسية ذات أساس a

حل في $\mathbb{R}$:

(1) $2^{2x} - 5 \times 2^x + 4 = 0$

(2) $3^{2x-1} = 81$

(3) $5^x = 7$ (اعط القيمة الدقيقة ثم مقربة)

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$

(5) $2^x + 3 \times 2^{-x} = 4$

(6) $4^x - 3 \times 2^x + 2 < 0$

☆☆☆

التمرين 4 — دراسة الدوال $x \mapsto a^x$

نعتبر $f(x) = 3^x$ و $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $h(x) = 2^{x^2-4x}$

- (1) ادرس اتجاه تغير f و g وأنجز جدولَي تغيراتهما مع النهايات.
- (2) بَيِّنْ أن $g(x) = f(-x)$ ثم استنتج أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب.
- (3) ادرس تغيرات h على $\mathbb{R}$ (استعمل $h(x) = e^{(x^2-4x)\ln 2}$).
- (4) يبلغ عدد سكان قرية 12000 نسمة ويزداد بنسبة 3% كل سنة: $P_n = 12000 \times 1.03^n$. أوجد أصغر عدد طبيعي n يكون عنده $P_n \geq 15000$.

☆☆☆

التمرين 5 — دراسة الدالة $\sqrt[3]{x} - x$

f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$.

- (1) احسب $f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (اكتب $f(x) = x(x^{-2/3} - 1)$).
- (2) احسب $f'(x)$ على $]0; +\infty[$ وبيِّنْ أنه ينعدم عند $x_0 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. شكِّلْ جدول تغيرات f .
- (3) حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.
- (4) هل f قابلة للاشتقاق عند 0؟ احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ وفسِّرْ النتيجة هندسيًا.

☆☆☆

التمرين 6 — نهايات التزايد المقارن المباشرة

احسب كل نهاية:

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ (ضع $t = \ln x$)

☆☆☆

التمرين 7 — نهايات بحالات عدم التعيين

احسب كل نهاية بإخراج الحد الغالب عاملاً مشتركاً:

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} + x} \quad (5)$$

☆☆☆

التمرين 8 — دراسة الدالة $(x + 2)e^{-x}$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (اكتب $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$). فسر النتيجة الثانية هندسيًا.

(2) بين أن $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

(3) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 وعيّن نقطة تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع محور الفواصل.

(4) ارسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

☆☆☆

التمرين 9 — دراسة الدالة $x \ln x - x$ وتمديدها بالاستمرارية

f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x \ln x - x$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (اكتب $f(x) = x(\ln x - 1)$ في الحالة الثانية).

(2) احسب $f'(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

(3) نمذد f بالاستمرارية عند 0 بوضع $f(0) = 0$. ادرس قابلية الاشتقاق عند 0 وفسر هندسيًا.

(4) حل المعادلة $f(x) = 0$ في $]0; +\infty[$.

☆☆☆

التمرين 10 — المقارنة بين n^{n+1} و $(n + 1)^n$

n عدد طبيعي غير معدوم. نريد مقارنة n^{n+1} و $(n + 1)^n$.

(1) احسب n^{n+1} و $(n + 1)^n$ من أجل $n = 1$ و 2 و 3 و 4 و 5 وأنجز جدولًا. ماذا تلاحظ؟

(2) بين أن $n^{n+1} > (n + 1)^n \iff \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n + 1)}{n + 1}$.

(3) نعتبر $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ على $]0; +\infty[$. بين أن $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ثم أن φ متناقصة تمامًا على $[e; +\infty[$.

(4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $n^{n+1} > (n + 1)^n$.

1	2	3	4	5	n
...	...	...	...	...	n^{n+1}
...	...	...	...	...	$(n + 1)^n$

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — القوى الحقيقية

$$27^{4/3} = (3^3)^{4/3} = 3^4 = 81, 16^{-3/4} = (2^4)^{-3/4} = 2^{-3} = \frac{1}{8}, 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4 \quad \mathbf{1}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2} = (2^{-2})^{-3/2} = 2^3 = 8$$

$$3^{-1/3} \times 3^{4/3} = 3^1 = 3 \text{ و } 9^{2/3} = (3^2)^{2/3} = 3^{4/3} \quad \mathbf{2}$$

$$2 > 1 \quad \mathbf{3}$$

فالدالة $2^x \mapsto x$ متزايدة تمامًا، و $\sqrt{2} \approx 1.414 < 1.5 < \frac{\pi}{2} \approx 1.571$ إذن $2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5} < 2^{\pi/2}$ (القيم: 2.665 و

$$2.828 \text{ و } 2.971). \text{ أما } \frac{1}{2} < 1 \text{ فالدالة } \left(\frac{1}{2}\right)^x \mapsto x \text{ متناقصة تمامًا فـ } \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1.5}$$

$$2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2} \approx 3.322 \quad \mathbf{4}$$

حل التمرين 2 — الجذر النوني

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}, \sqrt[3]{125} = 5, 3^4 = 81 \text{ لأن } \sqrt[4]{81} = 3 \quad \mathbf{1}$$

$$\sqrt[4]{64} = 64^{1/4} = (2^6)^{1/4} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2} \text{ و } \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \quad \mathbf{2}$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = 2^{1/3} \times 2^{2/3} = 2^1 = 2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \mathbf{3}$$

$$(\sqrt[4]{7})^{12} = 7^3 = 343 \text{ و } (\sqrt[5]{5})^{12} = 5^4 = 625 \quad \mathbf{4}$$

بما أن $625 > 343$ والدالة $t \mapsto t^{12}$ متزايدة تمامًا على $[0; +\infty[$ فإن $\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{7}$

حل التمرين 3 — معادلات ومتراجحات أسية ذات أساس a

$$X^2 - 5X + 4 = 0 \iff X = 1 \text{ أو } X = 4 \text{ أي } 2^x = 1 \text{ أو } 2^x = 4 \text{ و } S = \{0; 2\} \quad \mathbf{1}$$

$$3^{2x-1} = 3^4 \iff 2x-1 = 4 \iff x = \frac{5}{2} \text{ فـ } 81 = 3^4 \quad \mathbf{2}$$

$$5^x = 7 \iff x \ln 5 = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7}{\ln 5} \approx 1.209 \quad \mathbf{3}$$

$$8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ والدالة } \left(\frac{1}{2}\right)^x \mapsto x \text{ متناقصة تمامًا فـ المتراجحة تنعكس: } x \leq -3 \text{ و } S =]-\infty; -3] \quad \mathbf{4}$$

$$X + \frac{3}{X} = 4 \iff X^2 - 4X + 3 = 0 \iff X = 1 \text{ أو } X = 3 \text{ و } 2^x = 1 \iff x = 0 \text{ و } S = \{0; 3\} \quad \mathbf{5}$$

$$2^x = 3 \iff x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585 \text{ و } S = \left\{0; \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$$

$$X^2 - 3X + 2 < 0 \iff 1 < X < 2 \iff 1 < 2^x < 2 \iff 0 < x < 1 \text{ و } X = 2^x \text{ و } S =]0; 1[\quad \mathbf{6}$$

حل التمرين 4 — دراسة الدوال $x \mapsto a^x$

1

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$ متزايدة تمامًا، $f'(\ln 3) = \ln 3 \times 3^{\ln 3} > 0$ و $f(x) = e^{x \ln 3}$
و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty$ متناقصة تمامًا، $g'(\ln 3) = -\ln 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3} < 0$ و $g(x) = e^{-x \ln 3}$

$-\infty$	$+\infty$	x
+		$f'(x)$
0	$+\infty$	$f(x)$

$-\infty$	$+\infty$	x
-		$g'(x)$
$+\infty$	0	$g(x)$

2

إذا كانت $M(x; y) \in (\mathcal{C}_f)$ فإن $M'(-x; y)$ تحقق $g(-x) = f(x) = y$ أي $f(-x) = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x = g(x)$
 $M' \in (\mathcal{C}_g)$: المنحنيان متناظران بالنسبة إلى محور الترتيب.

3

$h(x) = (2x - 4) \ln 2 \times 2^{x^2 - 4x}$ و $h = e^u$ و $u(x) = (x^2 - 4x) \ln 2$
 $h(2) = 2^{4-8} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ عند $\pm\infty$ و $\ln 2 > 0$ و $x^2 - 4x \rightarrow +\infty$ و $h \rightarrow +\infty$

$-\infty$	2	$+\infty$	x
-	0	+	$h'(x)$
$+\infty$	$\frac{1}{16}$	$+\infty$	$h(x)$

4

$n \geq \frac{\ln 1.25}{\ln 1.03} \approx 7.55$ ف $\ln 1.03 > 0$ و $12000 \times 1.03^n \geq 15000 \iff 1.03^n \geq 1.25 \iff n \ln 1.03 \geq \ln 1.25$
أصغر عدد طبيعي: $n = 8$. تحقق: $1.03^7 \approx 1.2299 < 1.25$ و $1.03^8 \approx 1.2668 > 1.25$.

حل التمرين 5 — دراسة الدالة $\sqrt[3]{x} - x$

1

$f(0) = 0$. من أجل $x > 0$: $f(x) = x(x^{-2/3} - 1)$ و $x \rightarrow +\infty$ عندما $x^{-2/3} \rightarrow 0$ فالعامل الثاني $x \rightarrow -1$ و
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 1$ ف $f(x) = x^{1/3} - x$
 $f'(x) = 0 \iff x^{-2/3} = 3 \iff x^{2/3} = \frac{1}{3} \iff x = \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.1925$
لأن $x \mapsto x^{-2/3}$ كذلك) فهي موجبة قبل x_0 وسالبة بعده. $f(x_0) = \sqrt[3]{x_0} - x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$.

0	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$+\infty$	x
	+	0	$f'(x)$
		—	
0	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\infty$	$f(x)$

3

$\sqrt[3]{x} = x \iff x = x^3 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0$ أو $x = 1$ (على $[0; +\infty[$). من الجدول: $f(x) > 0$ على $]0; 1[$ و $f(x) < 0$ على $]1; +\infty[$.

4

عندما $x \rightarrow 0^+$ $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{-2/3} - 1 \rightarrow +\infty$ فالدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 والمنحنى يقبل عند O مماسًا شاقوليًا (محور الترتيب).

حل التمرين 6 — نهايات التزايد المقارن المباشرة

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (القوة 2). $n = 2$.

2) $\frac{e^x}{x^3} \rightarrow +\infty$ و $x^3 e^{-x} = \frac{x^3}{e^x} = \frac{1}{e^x/x^3}$ فالنهاية 0.

3) بوضع $x^2 e^x = X^2 e^{-X} = \frac{X^2}{e^X} \rightarrow 0$: $X = -x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \quad 5)$$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0 : (t \rightarrow +\infty \text{ و } x = e^t) \quad 6) \text{ بوضع } t = \ln x$$

حل التمرين 7 — نهايات بحالات عدم التعيين

$$1) \quad e^x - x^2 = e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) \quad \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 0 \text{ و } \frac{x^2}{e^x} \rightarrow 1 \text{ فالعامل الثاني } \rightarrow +\infty$$

$$2) \quad x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \quad \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \text{ فالنهاية } \rightarrow +\infty$$

$$3) \quad (x^2 - 3x) e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} - 3 \frac{x}{e^x} \rightarrow 0 - 0 = 0$$

$$4) \quad (x^2 + x) \ln x = x^2 \ln x + x \ln x \rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$5) \quad \text{نقسم البسط والمقام على } e^x \text{ للمقام } e^x \cdot e^x = e^{2x} \text{ و } \frac{e^x - 1}{e^{2x} + x} = \frac{1 - e^{-x}}{e^x + x e^{-x}} \quad e^{-x} \rightarrow 0 \text{ و } x e^{-x} \rightarrow 0 \text{ والمقام } \rightarrow +\infty \text{ فالنهاية } 0.$$

حل التمرين 8 — دراسة الدالة $(x+2)e^{-x}$

1

عند $-\infty$: $x+2 \rightarrow -\infty$ و $e^{-x} \rightarrow +\infty$. عند $+\infty$: $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ و $\frac{2}{e^x} \rightarrow 0$ ف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$:
محور الفواصل ($y=0$) مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

2

$$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = e^{-x}(1-x-2)$$

$$= -(x+1)e^{-x}$$

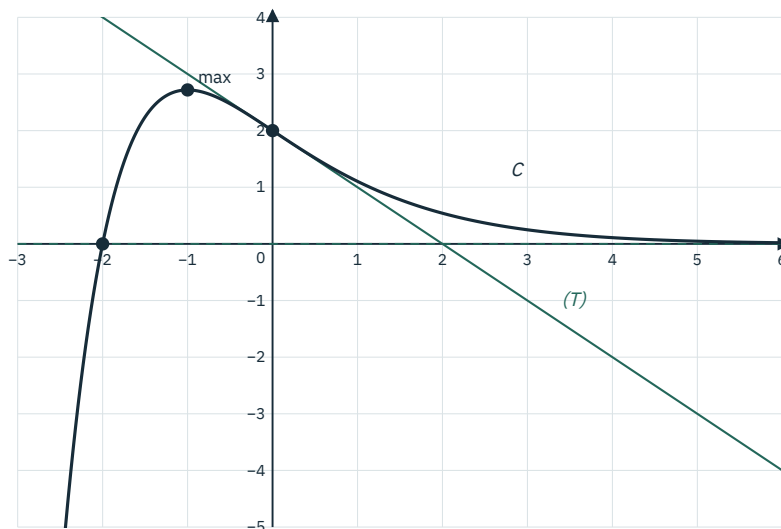
$$\text{و } e^{-x} > 0 \text{ ف إشارة } f' \text{ هي إشارة } -(x+1) . f(-1) = 1 \times e^1 = e \approx 2.72$$

$-\infty$	-1	$+\infty$	x
$+$	0	$-$	$f'(x)$
$-\infty$	e	0	$f(x)$

3

$$f(0) = 2 \text{ و } f'(0) = -1 \text{ ف } (T): y = -x + 2 . (-2; 0) : f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$$

4



حل التمرين 9 — دراسة الدالة $x \ln x - x$ وتمديدتها بالاستمرارية

1

$f(x) = x \ln x - x$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ عند $+\infty$: $\ln x - 1 \rightarrow +\infty$ و $\ln x \rightarrow +\infty$ فالنهاية $+\infty$.

2

$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ وهي سالبة على $]0; 1[$ وموجبة على $]1; +\infty[$. $f(1) = -1$.

0	1	$+\infty$	x
	0	+	$f'(x)$
0	$\searrow$	$\nearrow$	$f(x)$
	-1		

3

الدالة الممددة مستمرة عند 0 لأن $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ونسبة التغير: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x \ln x - x}{x} = \ln x - 1 \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow 0^+$. فالدالة غير قابلة للاشتقاق عند 0 ومنحنائها يقبل عند 0 مماسًا شاقوليًا.

4

$$S = \{e\} \iff x = e \ (x > 0) \iff f(x) = 0 \iff x(\ln x - 1) = 0 \iff \ln x = 1$$

حل التمرين 10 — المقارنة بين n^{n+1} و $(n+1)^n$

1

1	2	3	4	5	n
1	8	81	1024	15625	n^{n+1}
2	9	64	625	7776	$(n+1)^n$

من أجل $n = 1$ و $n = 2$: $n^{n+1} < (n+1)^n$ ثم ابتداءً من $n = 3$ تنعكس المقارنة: نخفّن $(n+1)^n > n^{n+1}$ من أجل $n \geq 3$.

2

$\ln$ متزايدة تماثلاً ف $(n+1) \ln n > n \ln(n+1) \iff n^{n+1} > (n+1)^n$ نقسم على $n(n+1) > 0$:
 $\iff \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

3

$\varphi'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ و $x \geq e \iff \ln x \geq 1 \iff 1 - \ln x \leq 0$ ف $\varphi' \leq 0$ على $[e; +\infty[$ وتنعدم عند e فقط: φ متناقصة تماثلاً على $[e; +\infty[$.

4

من أجل $n \geq 3$ لدينا $n < n+1 \leq 3 < e$ ف $\varphi(n) > \varphi(n+1)$ أي $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ وبالسؤال 2: $n^{n+1} > (n+1)^n$.
 (مثلاً $\varphi(3) \approx 0.3662 > \varphi(4) \approx 0.3466$)