

سلسلة تمارين 1

قابلية الاشتقاق والعدد المشتق ومعادلة المماس

تذكير: f قابلة للاشتقاق عند a إذا كانت $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تقبل نهاية منتهية ℓ عندما $h \rightarrow 0$ ؛ نكتب $f'(a) = \ell$. معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
في هذه السلسلة تُحسب الأعداد المشتقة بالتعريف (نسبة التغير) دون استعمال جداول المشتقات.

☆☆★

التمرين 1 — العدد المشتق بالتعريف (1)

(1) $f(x) = x^2 - 3x$: بيّن أن f قابلة للاشتقاق عند 2 واحسب $f'(2)$.

(2) $g(x) = 2x^2 + x$: بيّن أن g قابلة للاشتقاق عند -1 واحسب $g'(-1)$.

☆☆★

التمرين 2 — العدد المشتق بالتعريف (2)

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$: بيّن أن f قابلة للاشتقاق عند 3 واحسب $f'(3)$.

(2) $g(x) = \sqrt{x}$: بيّن أن g قابلة للاشتقاق عند 4 واحسب $g'(4)$.

☆☆★

التمرين 3 — معادلات المماسات

اكتب معادلة المماس لمنحنى كل دالة من التمرينين السابقين عند النقطة المعنية: $f(x) = x^2 - 3x$ عند 2، $g(x) = 2x^2 + x$ عند -1، $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند 3، $x \mapsto \sqrt{x}$ عند 4.

☆☆★

التمرين 4 — نقطة زاوية وقابلية الاشتقاق

(1) $f(x) = |x|$: ادرس قابلية اشتقاق f عند 0 (احسب نهايتي $\tau(h)$ من اليمين ومن اليسار).

(2) $g(x) = x|x|$: ادرس قابلية اشتقاق g عند 0، وإن كانت قابلة للاشتقاق فاكتب معادلة المماس عند O .

☆☆★

التمرين 5 — مماس شاقولي

(1) $f(x) = \sqrt{x}$ على $[0; +\infty[$: ادرس قابلية اشتقاق f عند 0 وفّر النتيجة هندسيًا.

(2) $g(x) = x\sqrt{x}$ على $[0; +\infty[$: ادرس قابلية اشتقاق g عند 0 وأعط معادلة المماس عند O .

☆☆★

التمرين 6 — دالة معرفة بعبارتين

(1) $f(x) = x^2$ إذا كان $x \leq 1$ و $f(x) = 2x - 1$ إذا كان $x > 1$. و $g(x) = x^2$ إذا كان $x \leq 1$ و $g(x) = 3x - 2$ إذا كان $x > 1$.

(1) بيّن أن f و g مستمرتان عند 1.

(2) احسب العدد المشتق من اليسار ومن اليمين عند 1 لكل منهما.

(3) استنتج أيهما قابلة للاشتقاق عند 1 وفّر النتيجة هندسيًا.

★★★

التمرين 7 — تعيين وسيطين تمرين للتعمق

f دالة معرفة بـ: $f(x) = ax^2 + b$ إذا كان $x \leq 1$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ إذا كان $x > 1$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) عيّن علاقة بين a و b لتكون f مستمرة عند 1.

(2) احسب العدد المشتق من اليسار ومن اليمين لـ f عند 1 بدلالة a .

(3) عيّن a و b لتكون f قابلة للاشتقاق عند 1 ثم اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1.

★★★

التمرين 8 — مماسات القطع المكافئ

$f(x) = x^2$ ومنحنائها (C_f) .

(1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي a تكون f قابلة للاشتقاق عند a و $f'(a) = 2a$.

(2) اكتب معادلة المماس T_a عند النقطة ذات الفاصلة a .

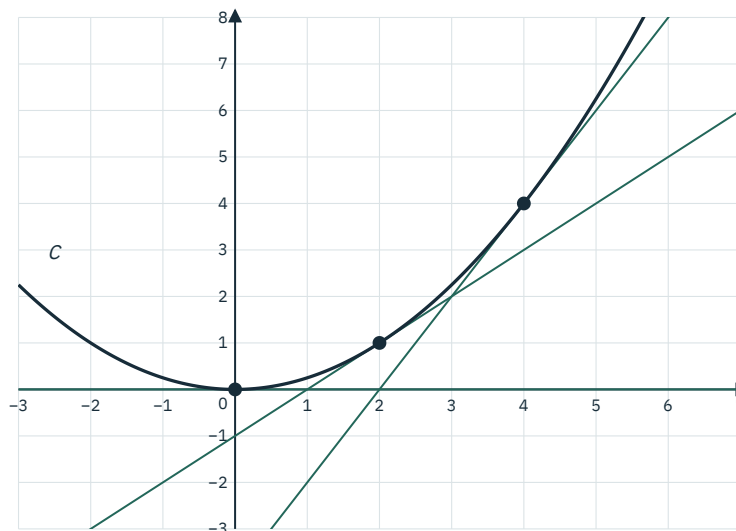
(3) عيّن المماس الموازي للمستقيم $y = 4x + 1$.

(4) عيّن المماسات التي تشمل النقطة $B(0; -1)$.

☆☆★

التمرين 9 — قراءة بيانية للعدد المشتق

المنحنى (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ، وقد رسمنا مماساته عند النقط ذات الفواصل 0 و 2 و 4 (المماس عند 0 هو محور الفواصل نفسه).



(1) اعتمادًا على الرسم، عيّن $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(4)$.

(2) يُعطى $f(x) = \frac{x^2}{4}$. تحقق من $f'(2)$ بالتعريف ثم اكتب معادلة المماس عند 4.

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — العدد المشتق بالتعريف (1)

1

$f(2) = 4 - 6 = -2$ و $f(2+h) = (2+h)^2 - 3(2+h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = -2 + h + h^2$ من أجل $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h + h^2}{h} \\ &= 1 + h\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h) = 1$ منتهية إذن f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2) = 1$.

2

$g(-1) = 2 - 1 = 1$ و $g(-1+h) = 2(1 - 2h + h^2) + (-1+h) = 1 - 3h + 2h^2$ من أجل $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{-3h + 2h^2}{h} = -3 + 2h$$

النهاية -3 إذن g قابلة للاشتقاق عند -1 و $g'(-1) = -3$.

حل التمرين 2 — العدد المشتق بالتعريف (2)

1

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \frac{\frac{3 - (3+h)}{3(3+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{3(3+h)h} = \frac{-1}{3(3+h)}\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = -\frac{1}{9}$ إذن $f'(3) = -\frac{1}{9}$.

2

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}\end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{1}{4}$ إذن $g'(4) = \frac{1}{4}$.

حل التمرين 3 — معادلات المماسات

نستعمل $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ بالقيم المحسوبة سابقاً:

الدالة	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	$2x^2 + x$	$x^2 - 3x$
a	4	3	-1	2
$f(a)$	2	$\frac{1}{3}$	1	-2
$f'(a)$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	-3	1

$$y = 1 \cdot (x - 2) - 2 = x - 4$$

$$y = -3(x + 1) + 1 = -3x - 2$$

$$y = -\frac{1}{9}(x - 3) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$$

حل التمرين 4 — نقطة زاوية وقابلية الاشتقاق

1

$f(0) = 0$ و $\tau(h) = \frac{|h|}{h}$ تساوي 1 إذا كان $h > 0$ و -1 إذا كان $h < 0$. إذن $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h) = -1$ (العدد المشتق من اليمين $f'_d(0) = 1$ ومن اليسار $f'_g(0) = -1$) فلا توجد نهاية: f غير قابلة للاشتقاق عند 0.

2

$g(0) = 0$ و $\tau(h) = \frac{h|h|}{h} = |h|$ من أجل $h \neq 0$. إذن $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$ قابلية للاشتقاق عند 0 و $g'(0) = 0$. المماس عند O :
 $y = 0 \times (x - 0) + 0 = 0$ أي محور الفواصل.

حل التمرين 5 — مماس شاقولي

1

من أجل $h > 0$: $\tau(h) = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = +\infty$. النهاية غير منتهية: f غير قابلة للاشتقاق عند 0. هندسيًا للمنحنى مماس شاقولي عند O (محور الترتيب).

2

من أجل $h > 0$ و $\tau(h) = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$ و $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = 0$ و $g'(0) = 0$ والمماس عند O هو $y = 0$.

حل التمرين 6 — دالة معرفة بعبارتين

1

$f(1) = g(1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$ إذن f و g مستمرتان عند 1.

2

من اليسار (كلتاها): $\tau(h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h$ فالنهاية 2.
من اليمين، $f: 2$: $\tau(h) = \frac{2(1+h) - 1 - 1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$ فالنهاية 2. من اليمين، g :
 $\tau(h) = \frac{3(1+h) - 2 - 1}{h} = \frac{3h}{h} = 3$ فالنهاية 3.

3

- الدالة f : العددين المشتقان من اليسار ومن اليمين متساويان (2) فهي قابلة للاشتقاق عند 1 و $f'(1) = 2$ ، ومماسها $y = 2x - 1$.
- الدالة g : $3 \neq 2$ فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1 رغم استمرارها.
- هندسيًا: منحنى g يقبل نقطة زاوية عند (1; 1) بنصفي مماس ميلهما 2 و 3.

حل التمرين 7 — تعيين وسيطين

1

$f(1) = a + b$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1} = 1$ والاستمرارية تعني $a + b = 1$.

2

من اليسار (مع $b = 1 - a$): $\tau(h) = \frac{a(1+h)^2 + b - (a+b)}{h} = \frac{2ah + ah^2}{h} = 2a + ah$ فالنهاية $2a$. من اليمين:
 $\tau(h) = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \frac{-h}{(1+h)h} = \frac{-1}{1+h}$ فالنهاية -1 .

3

القابلية للاشتقاق تتطلب الاستمرارية والتساوي: $2a = -1$ أي $a = -\frac{1}{2}$ ثم $b = 1 - a = \frac{3}{2}$. $f(1) = 1$ و $f'(1) = -1$.
والمماس: $y = -1(x - 1) + 1 = -x + 2$.

حل التمرين 8 — مماسات القطع المكافئ

1

$$\tau(h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

النهاية عند 0 هي $2a$ إذن $f'(a) = 2a$.

$$\begin{aligned} T_a : y &= 2a(x - a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

المماس يوازي $y = 4x + 1$ إذا فقط إذا كان ميله $a = 2$: $2a = 4 \iff$ معادلته $y = 4x - 4$ (النقطة $(2; 4)$).

من أجل $a = 1$ $y = -2x - 1$ (من أجل $a = -1$).
 $B(0; -1) \in T_a \iff -1 = 2a \times 0 - a^2 \iff a^2 = 1 \iff a = 1$ إذن مماسان: $y = 2x - 1$ (من

1

2

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\frac{(2+h)^2}{4} - 1}{h} = \frac{\frac{4+4h+h^2}{4} - 1}{h} \\ &= \frac{h + \frac{h^2}{4}}{h} = 1 + \frac{h}{4}\end{aligned}$$

النهاية 1 ف $f'(2) = 1$ وهذا يوافق القراءة. وعند $2:4 \rightarrow 2 + \frac{h}{4} = \frac{\frac{(4+h)^2}{4} - 4}{h} = 2 + \frac{h}{4} \rightarrow 2$ إذن $f'(4) = 2$ و $f(4) = 4$ والمماس: $y = 2(x - 4) + 4 = 2x - 4$.