

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

دورة: جوان 2015

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة: تقني رياضي

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطتين A و B اللتين لاحقيتهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + 3i$.

(1) أ) اكتب z_A ، z_B على الشكل الأسّي.

(ب) n عدد طبيعي، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

(ج) z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ احسب طولية العدد z وعمدة له، ثم اكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

(د) استنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

(2) أ) احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(ب) احسب z_D للاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; -1), (B; 1), (C; 1)\}$ ، ثم بين أن $ABDC$ مربع.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

القضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; 2; 2)$ ، $B(2; 0; 2)$ ، $C(-2; 3; 7)$

$$\text{والمستوي } (\mathcal{P}) \text{ المعروف بالتمثيل الوسيطى: } \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = -1 - 3\alpha - \beta \\ z = -\alpha \end{cases} \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ وسيطان حقيقيان.}$$

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

(ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2; 1; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

(2) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثم بين أن المستويين $(\mathcal{P})$ و (ABC) متعامدان.

$$\text{(ب) بين أن تقاطع } (\mathcal{P}) \text{ و } (ABC) \text{ هو المستقيم } (\Delta) \text{ ذو التمثيل الوسيطى: } \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -4 - 7t \\ z = -t \end{cases} \text{ } (t \in \mathbb{R})$$

(3) أ) عيّن إحداثيات النقطة H مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$.

- (ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) .
- (4) لتكن $(\mathcal{P})$ مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{u} \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}) = 0$ ($\vec{u}$ هو شعاع توجيه (Δ)).
- (أ) بيّن أن المجموعة $(\mathcal{P})$ هي مستوٍ يطلب تعيين عناصره المميزة، ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
- (ب) بيّن أن المستويات الثلاثة $(\mathcal{P})$ ، (ABC) و $(\mathcal{P}')$ تتقاطع في نقطة واحدة E ، ثم عيّن إحداثيات E .
- (ج) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

- (1) (أ) عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
- (ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2014^{2037} + 42 \times 138^{2015}$ على 13.
- (2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$.
- (ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

- (I) h الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) استنتج أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$ ، $h(x) > 0$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2} \ln(x+2)$.
- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm).
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) (أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$.
- (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) (أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
- (ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (4) (أ) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.
- (ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) .
- (ج) احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = -1$ و $x = 1$.
- (III) g الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ : $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2} |\ln(x+2)|$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ و $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى g ؟
- (2) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة.
- (3) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

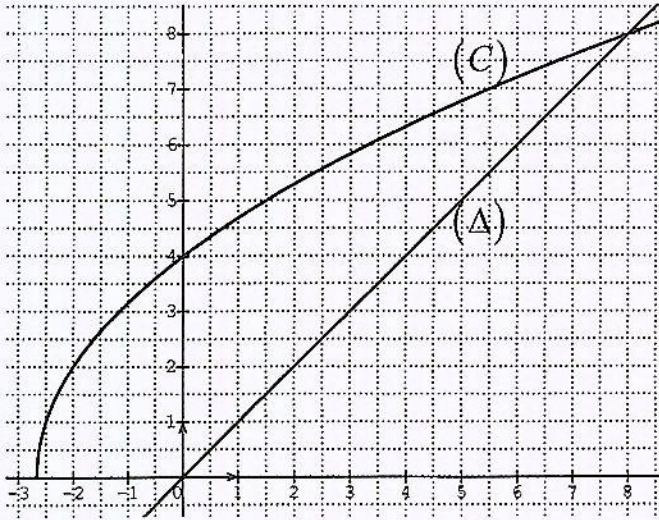
- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(2;3;1)$ ، $B(1;2;-2)$ و (D) المستقيم الذي تمثله الوسيطية:
$$\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
- (1) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له .
 ب) عيّن إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .
 - (2) $(\mathcal{P})$ المستوي المعيّن بالمستقيمين (D) و (Δ) .
 بين أنّ $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .
 - (3) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يشمل النقطة B ويعامد المستقيم (Δ) .
 ب) عيّن إحداثيات النقطة E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ) .
 ج) احسب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ) .
 د) احسب مساحة المثلث BEC .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة ذات المجهول z التالية: (I) $z^2 - 4(\sin \theta)z + 4 = 0$. حيث θ وسيط حقيقي .
- (2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .
- (3) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = 3\sqrt{3} + i$.
 أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي . واستنتج طبيعة المثلث ABC .
 ب) استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاوية له .
 ج) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{AC}$ ، ثم حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.
- (4) أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ تخيلي صرف مع $z \neq z_B$.
 ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقيا مع $z \neq z_B$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$
- (1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right]$ بما يلي: $h(x) = \sqrt{6x + 16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y = x$ (أنظر الشكل في الصفحة الموالية).



- (أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 (دون حسابها وموضعا خطوط الإنشاء).
- (ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربا.
- (2) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
- $$0 \leq u_n < 8$$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(8 - u_n)(u_n + 2)}{\sqrt{6u_n + 16 + u_n}}$$

(ج) استنتج اتجاه تغير (u_n) .

- (3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
- $$0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 < 8 - u_n \leq 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (x + 2)e^x - 2$.

(1) احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x + 1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(3) (أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,55 < \beta < -1,56$.

(ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left] -\infty; \frac{3}{2} \right]$.

(4) (أ) بين أن الدالة: $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x + 1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

(ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = 0$ ، $x = \alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال (3) أ).

(ج) جد حصرا للعدد A .