

مسألة شاملة

مسألة شاملة: دراسة دالة لوغاريتمية فردية

تمرينان مستقلان على نمط امتحان البكالوريا: الأول مسألة دراسة دالة لوغاريتمية كاملة (مجموعة التعريف، النهايات، المستقيمات المقاربة، المشتقة، جدول التغيرات، مماس، حل المعادلة $f(x)=0$ بمبرهنة القيم المتوسطة ورسم)، والثاني قصير حول تناقص مادة مشعة بالدالتين الأسية واللوغاريتمية. المدة المقترحة: ثلاث ساعات.

★★★

التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة لوغاريتمية

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x + \ln \frac{x-1}{x+1}$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

الجزء الأول: مجموعة التعريف والنهايات

- 1) بين أن مجموعة تعريف f هي $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ وأن f فردية.
- 2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم استنتج النهايات عند -1^- وعند $-\infty$.
- 3) بين أن المستقيم $y = x$ (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ وادرس وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) . ما المستقيمان المقاربان الشاقوليان؟

الجزء الثاني: التغيرات

- 4) بين أن $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ من أجل كل x من D .
- 5) شكّل جدول تغيرات f على $]1; +\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير f على $]-\infty; -1[$.
- 6) اكتب معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 2.

الجزء الثالث: المعادلة $f(x) = 0$

- 7) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]1; +\infty[$ حلاً وحيداً α وأن $1.54 < \alpha < 1.55$.
- 8) استنتج حلول $f(x) = 0$ في D .

الجزء الرابع: الرسم والمناقشة

- 9) ارسم (Δ) والمستقيمين المقاربين الشاقولين و (T) و $(\mathcal{C}_f)$.
- 10) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

☆☆☆

التمرين الثاني — تناقص مادة مشعة

تناقص كتلة مادة مشعة (بالغرام) بدلالة الزمن t (بالسنوات) وفق $N(t) = 800 e^{-0.05t}$.

- 1) ادرس اتجاه تغير N على $[0; +\infty[$ واحسب $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$.
- 2) نصف العمر T هو الزمن الذي تنقص فيه الكتلة إلى النصف. بين أن $T = 20 \ln 2$ واحسب قيمته المقربة.

(3) يبين أن $N(t+T) = \frac{N(t)}{2}$ من أجل كل t .

(4) بعد كم سنة تصبح الكتلة أقل من أو تساوي 100 غ؟ (عبر بدلالة $\ln 2$ ثم أعط قيمة مقربة).

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة لوغاريتمية

الجزء الأول

(1) يلزم $0 < \frac{x-1}{x+1}$ أي $x < -1$ أو $x > 1$ (جدول إشارة الحاصل). D متناظرة بالنسبة إلى 0 ومن أجل $x \in D$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x + \ln \frac{-x-1}{-x+1} = -x + \ln \frac{x+1}{x-1} \\ &= -x - \ln \frac{x-1}{x+1} = -f(x) \end{aligned}$$

(2) عند 1^+ : $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 0^+$ ف $\ln \frac{x-1}{x+1} \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow 1$ ف $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. عند $+\infty$: $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 1$ ف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

و $\ln \rightarrow 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. بما أن f فردية: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(3) $f(x) - x = \ln \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \ln 1 = 0$ عندما $x \rightarrow +\infty$ وكذلك عندما $x \rightarrow -\infty$ لأن $\frac{x-1}{x+1} \rightarrow 1$ أيضاً. فالمستقيم

$y = x$: (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$. الوضعية: إشارة $\ln \frac{x-1}{x+1}$:

• إذا كان $x > 1$: $0 < \frac{x-1}{x+1} < 1$ ف $\ln < 0$ و $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ) .

• إذا كان $x < -1$: $\frac{x-1}{x+1} > 1$ (مثلاً $x = -3$ يعطي 2) ف $\ln > 0$ و $(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ) .

ولا يتقاطعان لأن $x-1 = x+1 \iff \ln \frac{x-1}{x+1} = 0$ وهو مستحيل. المستقيمان المقاربان الشاقوليان: $x = 1$ و

$x = -1$.

الجزء الثاني

(4) $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ و $u'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$ إذن:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} \\ &= 1 + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

(5) على $[1; +\infty[$: $x^2 - 1 > 0$ و $x^2 + 1 > 0$ ف $f' > 0$.

1	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$

على $]-\infty; -1]$: $x^2 - 1 > 0$ أيضًا ف $f' > 0$ و f متزايدة تمامًا من $-\infty$ إلى $+\infty$ (متفق مع التناظر بالنسبة إلى O).

(6) $f(2) = 2 + \ln \frac{1}{3} = 2 - \ln 3 \approx 0.901$ و $f'(2) = \frac{5}{3}$. المماس:

$$(T) : y = \frac{5}{3}(x - 2) + 2 - \ln 3$$

$$= \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} - \ln 3$$

الجزء الثالث

(7) الدالة f مستمرة ومتزايدة تمامًا وصورتها $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α (مبرهنة القيم المتوسطة).
جدول قيم:

1.5	1.54	1.55	1.6	2	3	x
-0.1094	-0.0084	0.0161	0.1337	0.9014	2.3069	$f(x)$

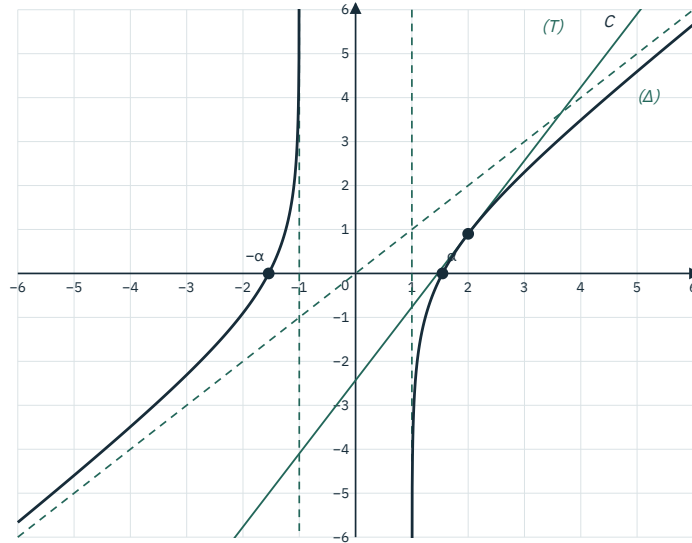
$f(1.54) < 0 < f(1.55)$ إذن $1.54 < \alpha < 1.55$.

(8) على $]-\infty; -1]$ كذلك f مستمرة ومتزايدة تمامًا وصورتها $\mathbb{R}$ فللمعادلة حل وحيد وبالفردية هو $-\alpha$

$(f(-\alpha) = -f(\alpha) = 0)$. إذن حلا المعادلة $f(x) = 0$ في D هما $-\alpha$ و α (تقريبًا ± 1.543).

الجزء الرابع

9 الرسم (المنحى متناظر بالنسبة إلى O):



10 على كل من $]-\infty; -1[$ و $]1; +\infty[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تمامًا وصورتها $\mathbb{R}$. إذن من أجل كل عدد حقيقي m للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد في كل مجال: حلان بالضبط.

حل التمرين الثاني — تناقص مادة مشعة

1) $N'(t) = -0.05 \times 800 e^{-0.05t} = -40 e^{-0.05t} < 0$ و $N(t)$ متناقصة تمامًا. و $-0.05t \rightarrow -\infty$ ف $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0$.

2) $N(0) = 800$. نحل

$N(T) = 400 \iff e^{-0.05T} = \frac{1}{2} \iff -0.05T = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \iff T = \frac{\ln 2}{0.05} = 20 \ln 2 \approx 13.86$ سنة.

3) باستعمال $-0.05T = -\ln 2$:

$$N(t+T) = 800 e^{-0.05t} e^{-0.05T} = N(t) e^{-\ln 2}$$

$$= N(t) \times \frac{1}{2}$$

4) $N(t) \leq 100 \iff e^{-0.05t} \leq \frac{1}{8} \iff -0.05t \leq -\ln 8 \iff t \geq 20 \ln 8 = 60 \ln 2 \approx 41.59$

41.6 سنة (وهو ثلاثة أضعاف نصف العمر لأن $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$).