الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2023

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

**يحتوي الموضوع على (03) صفحات ( من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5 )**

### التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها كريتان حمراوان مرقمتان بـ: $2$ ، $-3$ وخمس كريات بيضاء مرقمة بـ: $0$ ، $1$ ، $1$ ، $2$ ، $-2$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $0$ ، $1$ ، $2$

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس ونعتبر الحوادث $A$ ، $B$ ، $C$ الآتية:

$A$ " الحصول على 3 كريات من نفس اللون " ، $B$ " الحصول على الألوان الثلاثة "

$C$ " الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها معدوم "

**1)** أ) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\frac{3}{20}$

**ب)** احسب $P(A\cap C)$ ثم استنتج $P_C(A)$

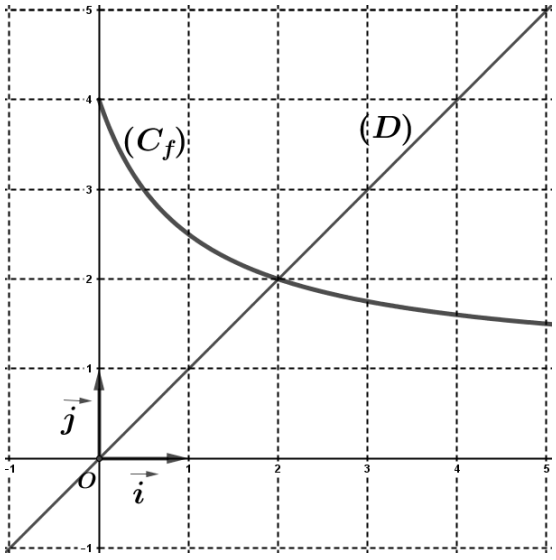
**2)** نعتبر المتغيّر العشوائي $X$ الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريات عدد الألوان المتحصّل عليها.

عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

**3)** نسحب الآن عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي وبإرجاع.

احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوم.

### التمرين الثاني: (04 نقاط)




**1)** $f$ الدّالة المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، $(D)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ:

$u_0=0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثمّ مثّل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$

( دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل )



odrous.com

**ب)** ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ وتقاربها.

**2)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$

أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $-\dfrac{1}{3}$ يُطلب تعيين حدّها الأول $v_0$

**ب)** عيّن عبارة الحدّ العام $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_n = -2 + \dfrac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

**جـ)** احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

**3)** نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = \dfrac{1}{u_0+2} + \dfrac{1}{u_1+2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n+2}$

احسب $S_n$ بدلالة $n$ ثمّ بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $T_n = \dfrac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

**1)** نعتبر المعادلة $(E)$ ... $16x + 361y = 818$ ذات المجهولين الصحيحين $x$ و $y$

أ) تحقّق أنّ الثنائية $(6;2)$ حلّ للمعادلة $(E)$ ثمّ استنتج مجموعة حلولها.

**ب)** عيّن كلّ الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ التي تحقّق: $|x + 23y| \le 4$

**2)** $P$ عدد طبيعي يُكتب $\overline{5\alpha\beta 0}$ في نظام التعداد الذي أساسه 7 ويُكتب $\overline{\beta\alpha 87}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان طبيعيان.

عيّن $\alpha$ و $\beta$ ثمّ اكتب $P$ في النظام العشري.

**3)** أ) حلّل العدد 2023 إلى جُداء عوامل أوّلية ثمّ عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كلّ منها يقسم 2023

**ب)** نضع: $d = PGCD(a;b)$ و $m = PPCM(a;b)$

عيّن كلّ الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $m^2 + 3d^2 = 2023$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** $g$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (6x-3)e^{-2x}$

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

**ب)** ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

**2)** أ) أثبت أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$

**ب)** استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$



odrous.com

**II)** $f$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1-3xe^{2x}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ( وحدة الطول $2cm$ )

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**ب)** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ $(C_f)$ عند $-\infty$

**جـ)** ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$

**2)** أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$، $f'(x)=g(-x)$

**ب)** استنتج أنّ $f$ متزايدة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[-\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

**3)** أ) أثبت أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له.

**ب)** ارسم $(\Delta)$، $(T)$ و $(C_f)$ على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ ( نأخذ : $f(0,25)\simeq 0$ ، $f(-1,3)\simeq 0$ و $f(-\alpha)\simeq 1,2$ )

**جـ)** عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين بالضبط.

**4)** أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب العدد الحقيقي $\int_{-\alpha}^{0} xe^{2x}dx$

**ب)** استنتج بالسنتيمتر المربّع المساحة $\mathcal{A}$ للحيّز المستوي المحدّد بـ $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها

$y=x+1$ ، $x=-\alpha$ و $x=0$

**جـ)** تحقّق أنّ $\mathcal{A}=2\left(\frac{4\alpha-1}{2\alpha-1}\right)cm^2$

**انتهى الموضوع الأول**



odrous.com

## الموضوع الثاني

**يحتوي الموضوع على صفحتين (02) ( من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5 )**

### التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق $U$ على كريتين حمراوين وكريتين خضراوين، ويحتوي صندوق $V$ على كريتين حمراوين وثلاث كريات خضراء ( كل الكريات متماثلة لا نفرّق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية:

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من كيس به 10 بطاقات متماثلة ومرقمة من 1 إلى 10

إذا تحصلنا على عدد أوّلي نسحب الكريتين من $U$ وفي باقي الحالات نسحب الكريتين من $V$

**1)** نعتبر الحوادث $A$ ، $B$ و $C$ الآتية:

$A$ " سحب كريتين حمراوين " ، $B$ " سحب كريتين خضراوين " و $C$ " سحب كريتين من لونين مختلفين "

**أ)** أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

**ب)** بيّن أنّ $P(A)=\frac{19}{150}$ و $P(B)=\frac{37}{150}$ ثمّ استنتج $P(C)$

**2)** $X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لكريتين عدد الكريات الحمراء المتحصل عليها.

**أ)** عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

**ب)** احسب احتمال الحدث: " $\ln X \leq 1$ "

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

**1)** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $\left(\overline{z}-1+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$

**2)** في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الترتيب حيث: $z_A=\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

**أ)** اكتب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ على الشكل المثلثي.

**ب)** استنتج أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

**3)** نضع: $K=\frac{z_C}{2z_A}$

**أ)** احسب طويلة العدد المركب $K$ وعمدة له ثمّ اكتبه على الشكل الجبري.

**ب)** استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

**4)** $n$ عدد طبيعي، نضع: $L_n=z_A^{\,n}+z_B^{\,n}$

بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، العدد المركب $L_n$ حقيقي.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

**1)** أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $9^n$ على 11 ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $1945^{2023}$ على 11



odrous.com

**ب)** عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي $n$ التي تحقّق الجملة : $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$

**2)** $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 4u_n - 8n + 2$

أ) بيّن أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها 9 يُطلب تعيين حدّها الأول $v_0$

**ب)** عيّن عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $u_n = 2 \times 9^n + 2n - \frac{1}{2}$

**3)** نضع: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

احسب $S_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $T_n = \frac{1}{4}\left(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3\right)$

**4)** بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$، $4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0[11]$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

**I)** $g$ الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x) = (x-3)\ln x + x$

**1)** أ) احسب من أجل كلّ $x$ من المجال $]0\,;+\infty[$ : $g'(x)$ و $g''(x)$

**ب)** بيّن أنّ الدّالة $g'$ متزايدة تماما على المجال $]0\,;+\infty[$

**2)** أ) بيّن أنّ المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$

**ب)** علما أنّ $g(\alpha) \simeq 0{,}85$ ، استنتج أنّه: من أجل كلّ $x$ من $]0\,;+\infty[$ ، $g(x) > 0$

**II)** $f$ الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\ln x\right)\ln x$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ( وحدة الطول $2\,cm$ )

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

**ب)** بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**2)** بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ من $]0\,;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$

**3)** بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسين $(T)$ و $(T')$ معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

**4)** أ) ارسم $(T)$ ، $(T')$ و $(C_f)$ ( نأخذ : $f(6) \simeq 5{,}9$ )

**ب)** عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ ثلاثة حلول بالضبط.

**5)** $F$ الدّالة المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{3}{2}x(\ln x)^2 - \frac{1}{4}x^2 - 3x$

أ) تحقّق أنّ $F$ أصلية للدّالة $f$ على المجال $]0\,;+\infty[$

**ب)** استنتج بالسنتيمتر المربّع مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

**انتهى الموضوع الثاني**



odrous.com