

سلسلة تمارين 3

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية: التعريف والمعادلات والمترجمات

من أجل كل عدد $a > 0$ يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$ ونكتب $b = \ln a$. إذن: $e^{\ln x} = x$ من أجل $x > 0$ و $\ln(e^x) = x$ من أجل كل x . $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$.

الدالة $\ln$ متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$ و $\ln a < \ln b \iff a < b$ و $\ln a = \ln b \iff a = b$.

الخواص الجبرية ($a > 0$ و $b > 0$ و n صحيح): $\ln(a^n) = n \ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
نعطي $\ln 3 \approx 1.099$ و $\ln 2 \approx 0.693$. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

☆☆★

التمرين 1 — حساب قيم بالتعريف

احسب بدون آلة حاسبة:

$$\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) \text{ و } \ln(e^5) \quad (1)$$

$$e^{2 \ln 3} \text{ و } e^{-\ln 2} \text{ و } e^{\ln 7} \quad (2)$$

$$\ln(e\sqrt{e}) \quad (3)$$

$$\text{حل المعادلة } \ln x = -2 \text{ في }]0; +\infty[. \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 2 — مجموعات التعريف

عَيِّن مجموعة تعريف كل دالة:

$$f(x) = \ln(2x - 6) \quad (1)$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 9) \quad (2)$$

$$h(x) = \ln \frac{x+1}{x-2} \quad (3)$$

$$k(x) = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\text{هل } p = q \text{ حيث } p(x) = \ln x + \ln(x-2) \text{ و } q(x) = \ln(x^2 - 2x) \text{ ؟} \quad (5)$$

☆☆★

التمرين 3 — أعداد بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$

اكتب كل عدد بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$ ثم أعط قيمة مقربة (استعمل $\ln 2 \approx 0.693$ و $\ln 3 \approx 1.099$):

$$A = \ln 12 \quad (1)$$

$$B = \ln \frac{8}{9} \quad (2)$$

$$C = \ln \sqrt{6} \quad (3)$$

$$D = \ln \frac{1}{24} \quad (4)$$

$$E = \ln 0.75 \quad (5)$$

☆☆☆

التمرين 4 — تبسيط عبارات

بسط:

$$A = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$B = \ln 14 - \ln 7 \quad (2)$$

$$C = \ln(e^2) + \ln \frac{1}{e} - \ln \sqrt{e} \quad (3)$$

$$D = 3 \ln 2 + \ln 5 - \ln 40 \quad (4)$$

$$E = e^{1+\ln 2} \quad (5)$$

☆☆☆

التمرين 5 — معادلات لوغاريتمية بسيطة

حل كل معادلة بعد تعيين مجموعة تعريفها:

$$\ln(2x - 1) = 2 \quad (1)$$

$$\ln(x + 3) = \ln(2x - 1) \quad (2)$$

$$\ln(x^2 - 3) = \ln(2x) \quad (3)$$

$$\ln(x - 1) = -1 \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 6 — معادلات فيها مجموع لوغاريتمات

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة (انتبه لمجموعة التعريف):

$$\ln(x + 1) + \ln(x - 2) = \ln 4 \quad (1)$$

$$\ln[(x + 1)(x - 2)] = \ln 4 \quad (2)$$

$$2 \ln x = \ln(x + 6) \quad (3)$$

قارن بين حلول السؤالين الأول والثاني وفسر الاختلاف.

☆☆☆

التمرين 7 — متراجحات لوغاريتمية

حل كل متراجحة بعد تعيين مجموعة تعريفها:

$$\ln(3x - 1) \geq \ln(x + 5) \quad (1)$$

$$\ln(x - 2) \leq 1 \quad (2)$$

$$\ln(2x + 1) > -2 \quad (3)$$

$$\ln(x^2 - x) < \ln(2x) \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 8 — تغيير المتغير $X = \ln x$

حل في $]0; +\infty[$ بوضع $X = \ln x$:

$$(1) \quad (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$$

$$(2) \quad 2(\ln x)^2 + \ln x - 1 < 0$$

$$(3) \quad (\ln x)^2 = \ln(x^2)$$

☆☆☆

التمرين 9 — رأس مال بفائدة مركبة

وضع شخص مبلغ 5000 دج في مصرف بفائدة مركبة سنوية 5%. بعد n سنة يصبح رأس المال $C_n = 5000 \times 1.05^n$.

$$(1) \quad \text{بيّن أن } C_n \geq 10000 \iff n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1.05} \text{ ثم أوجد أصغر عدد طبيعي } n \text{ يضاعف رأس المال. تحقق بحساب } 1.05^{14} \text{ و } 1.05^{15}.$$

$$(2) \quad \text{نعتبر الآن نقصاً بنسبة 20\% في السنة: } V_n = V_0 \times 0.8^n. \text{ أوجد أصغر عدد طبيعي } n \text{ بحيث } 0.8^n \leq 0.05. \text{ (انتبه إلى إشارة } \ln 0.8 \text{).}$$

☆☆☆

التمرين 10 — جمل معادلتين بمجهولين

حل في $\mathbb{R}^2$ الجملتين (بعد تعيين شروط الوجود):

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = 12 \\ \ln x + \ln y = \ln 35 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ \ln x + \ln y = \ln 18 \end{cases}$$

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

الحلول المفصلة

حل التمرين 1 — حساب قيم بالتعريف

$$(1) \quad \ln(e^{-3}) = -3 \text{ و } \ln(e^5) = 5$$

$$(2) \quad e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9 \text{ و } e^{-\ln 2} = e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ و } e^{\ln 7} = 7$$

$$(3) \quad \ln(e\sqrt{e}) = \frac{3}{2} \text{ ف } e\sqrt{e} = e \times e^{1/2} = e^{3/2}$$

$$(4) \quad S = \{e^{-2}\}. \ln x = -2 \iff x = e^{-2}$$

حل التمرين 2 — مجموعات التعريف

الشرط: ما بداخل $\ln$ موجب تماماً.

$$.D_f =]3; +\infty[: 2x - 6 > 0 \iff x > 3 \quad \mathbf{1)}$$

$$.D_g =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[: x^2 - 9 > 0 \text{ أو } x > 3 \iff x < -3 \quad \mathbf{2)}$$

$$\mathbf{3)}$$
 جدول الإشارة: $\frac{x+1}{x-2} > 0$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	—	0	+	+
$x-2$	—	—	0	+
$\frac{x+1}{x-2}$	+	0	—	+

$$.D_h =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

$$.D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\} : |x-1| > 0 \iff x \neq 1 \quad \mathbf{4)}$$

$\mathbf{5)}$ تتطلب $x > 0$ و $x-2 > 0$ أي $.D_p =]2; +\infty[$ و q تتطلب $x(x-2) > 0$ أي $.D_q =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ فمجموعتا التعريف مختلفتان و $p \neq q$ (مثلاً $p(-1) = \ln 3$ معرفة بينما $p(-1)$ غير معرفة). لكنهما متساويتان على $]2; +\infty[$ لأن $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ من أجل $a > 0$ و $b > 0$.

حل التمرين 3 — أعداد بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$

$$\mathbf{1)}$$
 $A = \ln(2^2 \times 3) = 2 \ln 2 + \ln 3 \approx 2 \times 0.693 + 1.099 = 2.485$

$$\mathbf{2)}$$
 $B = \ln 8 - \ln 9 = 3 \ln 2 - 2 \ln 3 \approx 2.079 - 2.198 = -0.119$

$$\mathbf{3)}$$
 $C = \frac{1}{2} \ln 6 = \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln 3) \approx 0.896$

$$\mathbf{4)}$$
 $D = -\ln 24 = -\ln(2^3 \times 3) = -3 \ln 2 - \ln 3 \approx -3.178$

$$\mathbf{5)}$$
 $E = \ln \frac{3}{4} = \ln 3 - 2 \ln 2 \approx -0.287$

(القيم المحسوبة بالآلة: 2.4849 و -0.1178 و 0.8959 و 3.1781 و -0.2877).

حل التمرين 4 — تبسيط عبارات

$$\mathbf{1)}$$
 $A = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \ln 1 = 0$

$$\mathbf{2)}$$
 $B = \ln \frac{14}{7} = \ln 2$

$$\mathbf{3)}$$
 $C = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\mathbf{4)}$$
 $D = \ln 8 + \ln 5 - \ln 40 = \ln \frac{8 \times 5}{40} = \ln 1 = 0$

$$\mathbf{5)}$$
 $E = e^1 \times e^{\ln 2} = 2e$

حل التمرين 5 — معادلات لوغاريتمية بسيطة

1) مجموعة التعريف:

$$D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

المعادلة تكافئ $e^2 = 2x - 1$ أي $x = \frac{1+e^2}{2} \approx 4.19$ وهو عنصر من D .

$$S = \left\{ \frac{1+e^2}{2} \right\}$$

2) مجموعة التعريف (الشرطان $x > -3$ و $x > \frac{1}{2}$):

$$D = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

المعادلة تكافئ $2x - 1 = x + 3$ أي $x = 4$ وهو في D . $S = \{4\}$.

3) الشرطان $x^2 - 3 > 0$ و $2x > 0$ يعطيان:

$$D =]\sqrt{3}; +\infty[$$

• المعادلة: $x^2 - 3 = 2x \iff x^2 - 2x - 3 = 0$

• الحلان: $x = 3$ أو $x = -1$.

• $-1 \notin D$ فيرفض.

$S = \{3\}$

4) مجموعة التعريف $D =]1; +\infty[$ المعادلة تكافئ $e^{-1} = x - 1$ أي $x = 1 + \frac{1}{e}$ وهو في D . $S = \{1 + e^{-1}\}$.

حل التمرين 6 — معادلات فيها مجموع لوغاريتمات

1) مجموعة التعريف $D =]2; +\infty[$

• المعادلة تكافئ $x^2 - x - 2 = 4$ أي $x^2 - x - 6 = 0$.

• الحلان: $x = 3$ أو $x = -2$.

• $-2 \notin D$ فيرفض.

$S = \{3\}$

2) مجموعة التعريف:

$$D =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

• نفس المعادلة $x^2 - x - 6 = 0$ وحلاها 3 و -2.

• كلاهما في D : $(-2 + 1)(-2 - 2) = 4 > 0$.

$S = \{-2; 3\}$

المعادلتان ليستا متكافئتين لأن مجموعتي التعريف مختلفتان: في السؤال الأول يجب أن يكون كل من $x + 1$ و $x - 2$ موجبًا بينما في الثاني يكفي أن يكون جداؤهما موجبًا.

3) مجموعة التعريف $D =]0; +\infty[$. بما أن $2 \ln x = \ln(x^2)$ فالمعادلة تكافئ $x^2 = x + 6$ أي $x^2 - x - 6 = 0$.
الحلان 3 و -2 والثاني ليس في D . $S = \{3\}$.

حل التمرين 7 — متراجحات لوغاريتمية

1) مجموعة التعريف $D = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$. بما أن $\ln$ متزايدة:

$$3x - 1 \geq x + 5 \iff x \geq 3$$

$$S = [3; +\infty[$$

2) مجموعة التعريف $D =]2; +\infty[$. المتراجحة:

$$\ln(x - 2) \leq \ln e \iff x - 2 \leq e \iff x \leq 2 + e$$

$$S =]2; 2 + e]$$

3) مجموعة التعريف $D = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$. المتراجحة:

$$\ln(2x + 1) > \ln(e^{-2}) \iff 2x + 1 > e^{-2} \iff x > \frac{e^{-2} - 1}{2} \approx -0.432$$

وهذا العدد أكبر من $-\frac{1}{2}$ إذن $S = \left] \frac{e^{-2} - 1}{2}; +\infty \right[$

4) الشرطان $x^2 - x > 0$ و $2x > 0$ يعطيان $D =]1; +\infty[$. المتراجحة:

$$x^2 - x < 2x \iff x^2 - 3x < 0 \iff 0 < x < 3$$

بالتقاطع مع D : $S =]1; 3[$.

حل التمرين 8 — تغيير المتغير $X = \ln x$

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \iff X = 2 \text{ أو } X = 1 \text{ أي } \ln x = 2 \text{ أو } \ln x = 1. S = \{e; e^2\}$$

$$2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1) < 0 \iff -1 < X < \frac{1}{2} \iff -1 < \ln x < \frac{1}{2} \iff e^{-1} < x < e^{1/2}. S =]e^{-1}; \sqrt{e}[$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln x \iff X(X - 2) = 0 \iff X = 0 \text{ أو } X = 2 \text{ أي } x = 1 \text{ أو } x = e^2. S = \{1; e^2\}$$

حل التمرين 9 — رأس مال بفائدة مركبة

1

$$\ln 1.05 > 0 \text{ و } 5000 \times 1.05^n \geq 10000 \iff 1.05^n \geq 2 \iff \ln(1.05^n) \geq \ln 2 \iff n \ln 1.05 \geq \ln 2$$

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1.05} \approx 14.21 \text{ ف } n = 15 \text{ أصغر عدد طبيعي هو } n = 15. \text{ تحقق: } 1.05^{14} \approx 1.9799 < 2 \text{ و } 1.05^{15} \approx 2.0789 > 2$$

2

$0.8^n \leq 0.05 \iff n \ln 0.8 \leq \ln 0.05$ و $\ln 0.8 < 0$ (لأن $0.8 < 1$) فعند القسمة عليه تنعكس المتراجحة:
 $n \geq \frac{\ln 0.05}{\ln 0.8} \approx 13.43$. أصغر عدد طبيعي هو $n = 14$. تحقق: $0.8^{13} \approx 0.0550 > 0.05$ و $0.8^{14} \approx 0.0440 < 0.05$.

حل التمرين 10 — جمل معادلتين بمجهولين

- 1) الشرطان:** $x > 0$ و $y > 0$. $\ln x + \ln y = \ln(xy) = \ln 35 \iff xy = 35$. إذن x و y حلا المعادلة $t^2 - 12t + 35 = 0$ ($\Delta = 4$) أي $t = 5$ أو $t = 7$. $S = \{(5; 7); (7; 5)\}$ وكلاهما مقبول.
- 2) الشرطان:** $x > 0$ و $y > 0$. $xy = 18$ و $y = x - 3$ ف $x^2 - 3x - 18 = 0$ ف $\Delta = 81$ و $x(x - 3) = 18$ ف $x = 6$ أو $x = -3$. $x = -3$ مرفوض لأن $x > 0$. إذن $x = 6$ و $y = 3$ ($3 > 0$ مقبول). $S = \{(6; 3)\}$.