

ورقة أنشطة

أنشطة تمهيدية لاكتشاف مفهوم النهاية

في هذه الورقة تكتشف بنفسك مفهوم النهاية انطلاقاً من جداول قيم وقراءات بيانية ثم تصوغ تخميناً وتتحقق منه بالحساب. استعمل الآلة الحاسبة عند الحاجة. اقرأ كل نشاط بتمعن، أجب على الأسئلة بالترتيب، ثم قارن إجابتك مع الحلول المفصلة في آخر الورقة.

☆☆★

النشاط 1 — عندما يكبر x كثيراً

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$.

10	100	1000	10^4	10^6	x
...	...	...	...	...	$f(x)$

- أكمل الجدول أعلاه بالقيم المقربة إلى 10^{-4} .
- ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ عندما يأخذ x قيمة كبيرة جداً؟ خمن العدد الذي تقترب منه هذه القيم.
- للتحقق من التخمين:

(أ) بين أنه من أجل كل x من $]-2; +\infty[$ فإن: $f(x) - 3 = \frac{-5}{x+2}$.

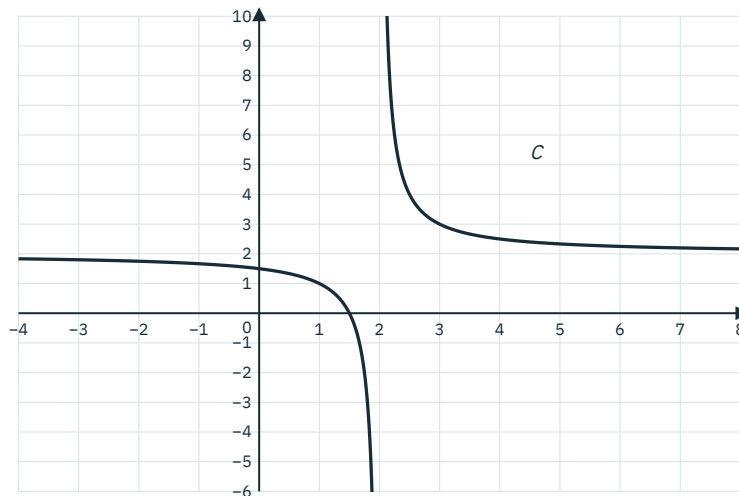
(ب) حدّد أصغر عدد حقيقي α بحيث إذا كان $x > \alpha$ فإن $|f(x) - 3| < 10^{-3}$.

- ماذا تستنتج بخصوص $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؟ ثم فسر النتيجة هندسياً.

☆☆★

النشاط 2 — على جانبي العدد 2

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ بـ: $h(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ ، ومنحنائها (C_h) مرسوم أدناه (بدون مستقيماته المقاربة).



2.1	2.01	2.001	2.0001	x
...	...	...	...	$h(x)$

قيم x أكبر من 2 ومقتربة منه

1.9	1.99	1.999	1.9999	x
...	...	...	...	$h(x)$

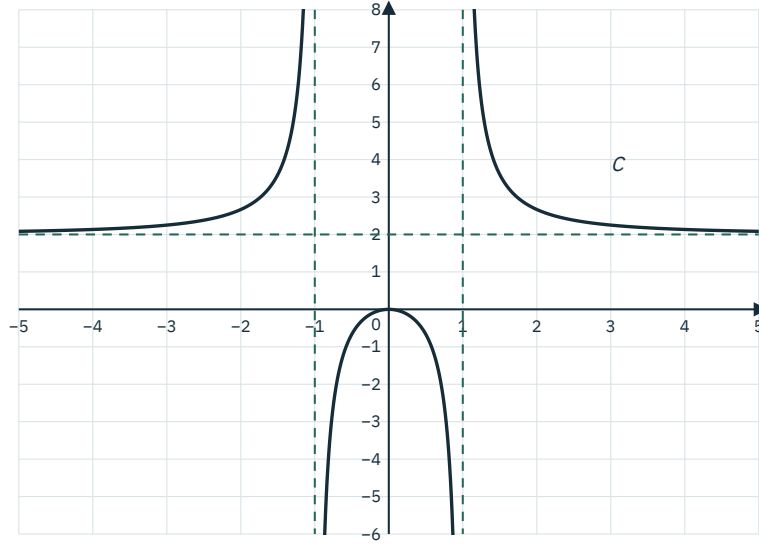
قيم x أصغر من 2 ومقتربة منه

- (1) أكمل الجدولين.
- (2) ماذا تلاحظ على $h(x)$ عندما يقترب x من 2 بقيم أكبر من 2؟ وبقيم أصغر من 2؟
- (3) اعتمادًا على المنحنى، ماذا يحدث لقيم $h(x)$ عندما يأخذ x قيمًا كبيرة جدًا موجبة أو سالبة؟
- (4) ارسم على الشكل المستقيمين المقارين للمنحنى (C_f) وأعط معادلة كل منهما.
- (5) تحقق أنه من أجل كل $x \neq 2$: $h(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$ ثم أعد تفسير الملاحظات السابقة بهذه الكتابة.



النشاط 3 — قراءة بيانية

المنحنى (C_f) المرسوم أدناه هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. الخطوط المتقطعة المرسومة خطوط مساعدة للقراءة.



- (1) اقرأ بيانيًا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) اقرأ بيانيًا: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- (3) هل للدالة f نهاية عند 1؟ علّل.
- (4) أعط معادلات المستقيمتين المقاربتين للمنحنى.
- (5) تحقق جبريًا أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$: $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2 - 1}$ ، ثم فسر بها قراءتك السابقة.

★★★

النشاط 4 — نهاية لا نهائية وغياب النهاية

الجزء أ

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x + 3$.

(1) أوجد في كل حالة عددًا α بحيث: $x > \alpha \Rightarrow g(x) > A$ من أجل $A = 100$ ثم $A = 10^4$ ثم $A = 10^6$.

(2) ماذا يمكنك أن تقول عن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ؟

الجزء ب

نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = \cos x$.

0	π	2π	3π	4π	x
...	...	...	...	...	$k(x)$

(1) أكمل الجدول بقيم دقيقة.

(2) ماذا تلاحظ؟ هل تقترب $k(x)$ من عدد وحيد عندما يؤول x إلى $+\infty$ ؟

(3) لاحظ على التمثيل البياني للدالة $\cos$ وعلى الجدول: هل تقترب $k(x)$ من عدد وحيد عندما يؤول x إلى $+\infty$ ؟ ماذا تستنتج بخصوص نهاية k عند $+\infty$ ؟ (لا يُطلب برهان).

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل النشاط 1 — عندما يكبر x كثيرًا

السؤال 1

10	100	1000	10^4	10^6	x
2.5833	2.9510	2.9950	2.9995	2.999995	$f(x)$

مثال على الحساب: $f(100) = \frac{3 \times 100 + 1}{100 + 2} = \frac{301}{102} \approx 2.9510$.

السؤال 2

كلما كبر x اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 3 دون أن تتجاوزه: $f(x) < 3$ في كل الحالات (الخانة الأخيرة مقربة إلى 10^{-6} لأن $f(10^6) \approx 2.999995$ وليس 3 تمامًا، وسنبرر ذلك في السؤال 3). نخمن أن $f(x)$ يقترب من 3 عندما يؤول x إلى $+\infty$.

السؤال 3

(أ) من أجل كل x من $]-2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= \frac{3x + 1}{x + 2} - 3 \\ &= \frac{3x + 1 - 3(x + 2)}{x + 2} \\ &= \frac{3x + 1 - 3x - 6}{x + 2} \\ &= \frac{-5}{x + 2} \end{aligned}$$

(ب) لأن $x + 2 > 0$ فإن $f(x) - 3 = \frac{-5}{x + 2} < 0$ أي $f(x) < 3$ من أجل كل $x > -2$. ومنه:

$$|f(x) - 3| = \frac{5}{x + 2}$$

إذن:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 10^{-3} &\iff \frac{5}{x + 2} < 10^{-3} \\ &\iff x + 2 > 5 \times 10^3 \quad (\text{لأن } x + 2 > 0) \\ &\iff x > 4998 \end{aligned}$$

فالعدد $\alpha = 4998$ يحقق المطلوب: ابتداءً من $x > 4998$ يكون $f(x)$ على بعد أقل من 0.001 من 3.

السؤال 4

يمكن جعل المسافة $|f(x) - 3| = \frac{5}{x + 2}$ أصغر من أي عدد موجب نختاره (مثلاً من أجل 10^{-6} يكفي أخذ $x > 5 \times 10^6 - 2$) بشرط أخذ x كبيراً بما يكفي. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

هندسياً: المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقترب من المستقيم الذي معادلته $y = 3$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ ، فهذا المستقيم مستقيم مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

حل النشاط 2 — على جانبي العدد 2

السؤال 1

2.1	2.01	2.001	2.0001	x
12	102	1002	10002	$h(x)$

1.9	1.99	1.999	1.9999	x
-8	-98	-998	-9998	$h(x)$

$$\text{مثال: } h(1.99) = \frac{0.98}{-0.01} = -98 \text{ و } h(2.01) = \frac{2 \times 2.01 - 3}{2.01 - 2} = \frac{1.02}{0.01} = 102$$

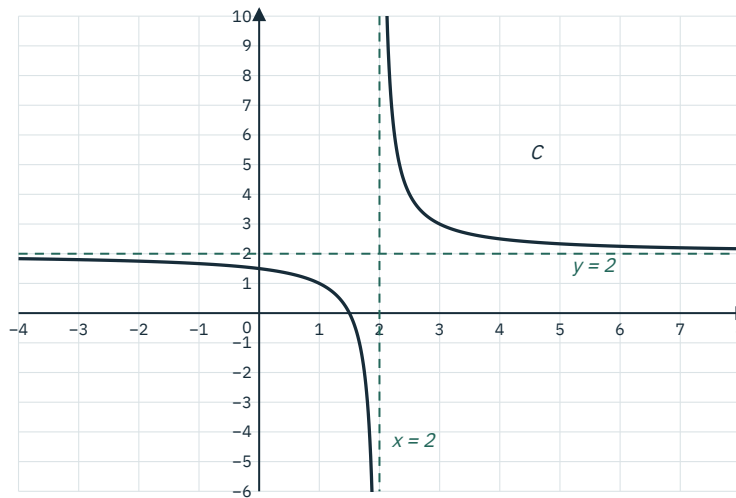
السؤال 2

- بقيم x أكبر من 2: تصبح $h(x)$ موجبة وكبيرة جدًا، فنحن $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = +\infty$.
 - بقيم x أصغر من 2: تصبح $h(x)$ سالبة وكبيرة جدًا بالقيمة المطلقة، فنحن $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty$.
- النهايتان اليمنى واليسرى مختلفتان فلا توجد نهاية للدالة h عند 2.

السؤال 3

من المنحنى: عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ تقترب $h(x)$ من العدد 2؛ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$ (المنحنى فوق المستقيم $y = 2$ عند $+\infty$ وتحت عند $-\infty$).

السؤال 4



المستقيم $x = 2$ مستقيم مقارب شاقولي، والمستقيم $y = 2$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_g) .

السؤال 5

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x-2} &= \frac{2(x-2) + 1}{x-2} \\ &= \frac{2x - 4 + 1}{x-2} \\ &= \frac{2x - 3}{x-2} = h(x) \end{aligned}$$

عندما يكبر $|x|$ يصبح $\frac{1}{x-2}$ قريبًا من 0 فيقترب $h(x)$ من 2. وعندما يقترب x من 2 يصبح المقام $x - 2$ قريبًا من 0 فيكبر $\left| \frac{1}{x-2} \right|$ ، وإشارته موجبة إذا كان $x > 2$ وسالبة إذا كان $x < 2$ ، وهذا يفسر الملاحظات.

حل النشاط 3 — قراءة بيانية

السؤال 1

المنحنى يقترب من المستقيم $y = 2$ عند طرفيه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

السؤال 2

- عند 1 من اليمين (المنحني يصعد بلا حدود): $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.
- عند 1 من اليسار (المنحني ينزل بلا حدود): $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- عند -1 من اليسار: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.
- عند -1 من اليمين: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

السؤال 3

لا؛ النهايتان عند 1 من اليمين ومن اليسار مختلفتان ($+\infty$ و $-\infty$)، فلا توجد نهاية عند 1. وكذلك عند -1.

السؤال 4

المستقيمات المقاربة: $y = 2$ (أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$)، $x = 1$ و $x = -1$ (شاقوليان).

السؤال 5

$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{x^2 - 1} &= \frac{2(x^2 - 1) + 2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{2x^2 - 2 + 2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x) \end{aligned}$$

عندما يكبر $|x|$ يكبر $x^2 - 1$ فيقترب $\frac{2}{x^2 - 1}$ من 0 ومنه $f(x) \rightarrow 2$. وعند $x = \pm 1$ ينعدم المقام فيكبر الحد $\frac{2}{x^2 - 1}$ بالقيمة المطلقة، وهذا يوافق وجود المستقيمين $x = 1$ و $x = -1$.

حل النشاط 4 - نهاية لا نهائية وغياب النهاية

الجزء أ - السؤال 1

$$\alpha = \frac{A - 3}{2} : g(x) > A \iff 2x + 3 > A \iff x > \frac{A - 3}{2}$$

100	10^4	10^6	A
48.5	4998.5	499998.5	α

الجزء أ - السؤال 2

مهما كان العدد A (كبيرًا كما نشاء) يوجد عدد $\alpha = \frac{A - 3}{2}$ بحيث يكون $g(x) > A$ كلما كان $x > \alpha$. إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

الجزء ب - السؤال 1

0	π	2π	3π	4π	x
1	-1	1	-1	1	k(x)

الجزء ب – السؤال 2

قيم $k(x)$ تتناوب بين 1 و -1 ولا تقترب من عدد وحيد.

الجزء ب – السؤال 3

يبقى المنحنى (والجدول) يتذبذب بين -1 و 1 مهما كبر x ، ولا يقترب من عدد وحيد. نقبل أن الدالة $\cos$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$.