

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب : $2x + y - z + 1 = 0$ و $x - 2y + z - 2 = 0$.

(1) بين أن المستويين (P) و (P') متقاطعان.

(2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق : $d(M, (P)) = d(M, (P'))$ حيث $d(M, (P))$ المسافة بين النقطة M والمستوي (P) ، $d(M, (P'))$ المسافة بين M و (P') .
(3) تحقق أن النقطة $A(1; 2; 0)$ تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

(4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب.
أ - جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH') .

ب - استنتج إحداثيات كل من النقطتين H و H' .

(5) عيّن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة $[HH']$ ثم احسب مساحة المثلث AHH' .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$.
(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) عيّن إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

(3) ارسم (C) و (Δ) .

(II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) مثل في الشكل السابق على محور الفواصل ، الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (بدون حسابها) موضّحا خطوط الإنشاء.

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(3) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

ب - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.

د - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقها

العدد المركب z حيث $(z \neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقها العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z-2}{z-1}$.

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z' = z$.

(2) النقطتان A و B لاحقتهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1-i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

أ - اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي.

ب - بين أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

(3) نضع $z' \neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور الترتيب ثم أنشئ (Γ) .

(4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S = h \circ R$ وعناصره المميزة.

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S .

ج - عيّن ثم أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S .

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$.

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أ - بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها 1.

(4) أ - بين أنّ (C) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) حيث: $y = x - 1$ معادلة له.

ب - ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) .

(5) ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C) .

(6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث: $y = mx - m$ معادلة له.

أ - تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب - ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$.

(7) أ - جد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب - احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C) ، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

ج - عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ: $I_n > 2$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(5; -1; -2)$ و $B(3; 12; -7)$.

$$(\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = 4k \end{cases} ; (k \in \mathbb{R})$$

- (1) أ) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-2; 1; 1)$ شعاع توجيه له .
 ب) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان ، ثمّ تحقق أنّ النقطة $C(1; 1; 0)$ نقطة تقاطعهما .
- (2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .
 أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2; 11; -7)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثمّ جد معادلة ديكارتية له .
 ب) بيّن أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P) .

$$(3) \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان و } (P') \text{ مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء المعرفة بـ: } \begin{cases} x = 3 - \beta \\ y = 12 + 12\alpha + 9\beta \\ z = -7 - 6\alpha - 11\beta \end{cases}$$

- أ) أثبت أنّ المجموعة (P') هي مستوٍ ثمّ تحقق أنّ $13x - y - 2z - 41 = 0$ هي معادلة ديكارتية له .
 ب) عيّن إحداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب .
 ج) احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(I) f \text{ الدالة العددية المعرفة على المجال } [0; +\infty[\text{ بـ: } f(x) = \frac{5x}{x+2}$$

$$(1) \text{ أ) احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها .
 ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$: $f(x) \geq 0$.

$$(II) (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بدّها الأول } u_0 = 1 \text{ و من أجل كل عدد طبيعى } n, u_{n+1} = \frac{5u_n}{u_n + 2}$$

$$(1) \text{ أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعى } n : 1 \leq u_n \leq 3$$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

$$(2) (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$$

$$\text{أ) برهن أنّ } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{2}{5} \text{ ، يطلب حساب حدّها الأول } v_0$$

ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

$$(3) \text{ اكتب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث : } S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$$

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ ، المعادلة : } \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) (z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي

$$\text{لاحقاتها على الترتيب : } z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i , z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_C = \bar{z}_B$$

(أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

(ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) (أ) عيّّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

(ب) عيّّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - z_A| = |\bar{z} - z_B|$ حيث $\bar{z}$ هو مرافق z .

(ج) عيّّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = z_B + \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$

ثمّ تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

(2) (أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ، أحدهما معدوم والآخر α حيث : $-1,52 < \alpha < -1,51$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 1cm) .

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$. (حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f) .

(ج) شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$) .

(د) عيّّن دون حساب: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

(2) (أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(ج) بيّن أنّ للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما .

(د) ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

(هـ) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m - x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0$

على المجال $[-2; +\infty[$.

(III) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

(1) عيّّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

(2) (أ) احسب التكامل التالي : $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً وفسّر النتيجة هندسياً .

(ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني