

مسألة شاملة

مسألة شاملة: دراسة دالة وتقريب تآلفي ودالة مثلثية

ثلاثة تمارين مستقلة على نمط امتحان البكالوريا: دراسة دالة ناطقة (نهايات، مستقيمت مقارنة، مشتقة، جدول تغيرات، مماس، مبرهنة القيم المتوسطة، رسم)، ثم تمرين التقريب التآلفي وطريقة أولر، ثم دراسة دالة مثلثية. المدة المقترحة: ثلاث ساعات.

★★★

التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة ناطقة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

الجزء الأول: نهايات ومستقيمت مقارنة

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. فسّر هندسيًا النتيجة الأخيرة.

(2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا (Δ) يطلب تعيين معادلته، وادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

الجزء الثاني: الاشتقاقية والتغيرات

(3) بين أن $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

(4) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 3.

الجزء الثالث: المعادلة $f(x) = m$

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 5$ تقبل حلين a و b بحيث $1 < a < 2 < b$. عيّن بجدول قيم تأطيرًا للعدد a سعته 10^{-2} وبين أن $3 < b < 4$.

(6) تحقق جبريًا من النتيجة السابقة بحل المعادلة $x^2 - 5x + 5 = 0$.

(7) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$.

الجزء الرابع: الرسم

(8) ارسم (Δ) و (T) و (C_f) على المجال $[-4; 6]$ تقريبًا.

☆☆☆

التمرين الثاني — التقريب التآلفي وطريقة أولر

نعتبر الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x}$ على $[0; +\infty[$.

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق عند 4 وأن التقريب التآلفي لها بجوار 4 هو: $\sqrt{4+h} \approx 2 + \frac{h}{4}$.

(2) استعمل ذلك لإعطاء قيمة تقريبية لـ $\sqrt{4.04}$ و $\sqrt{3.96}$ ثم قارن مع قيمة الآلة الحاسبة.

(3) نريد تقريب قيم f على $[1; 2]$ بطريقة أولر بخطوة $h = 0.25$ انطلاقًا من $f(1) = 1$ وباستعمال $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:
 $x_{k+1} = x_k + 0.25$ و $y_{k+1} = y_k + 0.25 \times f'(x_k)$. أنجز جدولًا بقيم k من 0 إلى 4 وقارن y_4 مع $\sqrt{2}$.

★★★

التمرين الثالث — دراسة دالة مثلثية

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ و (C_f) منحناها.

- (1) بين أن f دورية دورها 2π وأنها فردية. كيف نستنتج ذلك لتقتصر الدراسة على $[0; \pi]$ ؟
- (2) بين أن $f'(x) = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ (يمكن استعمال $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$).
- (3) ادرس إشارة $f'(x)$ على $[0; \pi]$ ثم شكّل جدول تغيرات f على $[0; \pi]$.
- (4) اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
- (5) ارسم (C_f) على $[-\pi; \pi]$.

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين الأول (مسألة) — دراسة دالة ناطقة

الجزء الأول

(1) من أجل $x \neq 0$: $f(x) = \frac{x^2}{x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}$ و $1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$ ف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. عند 1:

البسط $x^2 \rightarrow 1 > 0$ والمقام $x - 1 \rightarrow 0^+$ من اليمين و 0^- من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

إذن المستقيم $x = 1$ مقارب شاقولي للمنحنى (C_f) .

(2) نتحقق:

$$\begin{aligned} x + 1 + \frac{1}{x - 1} &= \frac{(x + 1)(x - 1) + 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = \frac{x^2}{x - 1} = f(x) \end{aligned}$$

إذن $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x - 1}$ ويؤول إلى 0 عندما $x \rightarrow \pm\infty$. المستقيم $y = x + 1$: (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$. الوضعية:

- إذا كان $x > 1$: $\frac{1}{x - 1} > 0$ فالمنحنى (C_f) فوق (Δ) .
- إذا كان $x < 1$: $\frac{1}{x - 1} < 0$ فالمنحنى (C_f) تحت (Δ) .
- لا تقاطع بينهما لأن $\frac{1}{x - 1} \neq 0$.

الجزء الثاني

(3) $f'(x) = \frac{2x(x - 1) - x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$ المقام موجب بإشارة f' إشارة $x(x - 2)$. $f(0) = 0$ و $f(2) = 4$.

$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	x
+	0	-	-	0	$f'(x)$
	0		$+\infty$	$+\infty$	$f(x)$
$-\infty$		$-\infty$	4		

$$f'(3) = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4} \text{ و } f(3) = \frac{9}{2} \quad (4) \text{ المماس:}$$

$$(T) : y = \frac{3}{4}(x - 3) + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

الجزء الثالث

5 الحل a : على $]1; 2]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تمامًا، وصورة هذا المجال هي $[4; +\infty[$.
بما أن $5 \in [4; +\infty[$ و $f(2) = 4 \neq 5$ فللمعادلة $f(x) = 5$ حل وحيد a في $]1; 2]$ (مبرهنة القيم المتوسطة).
الحل b : على $[2; +\infty[$ الدالة f مستمرة ومتزايدة تمامًا وصورة هذا المجال $[4; +\infty[$ فللمعادلة حل وحيد $b > 2$.
تأطير a بجدول قيم:

1.2	1.3	1.4	1.38	1.39	x
7.2000	5.6333	4.9000	5.0116	4.9541	$f(x)$

لدينا $f(1.38) > 5 > f(1.39)$ و f متناقصة على $]1; 2]$ إذن:

$$1.38 < a < 1.39$$

وبالنسبة لـ b : $f(3) = 4.5 < 5$ و $f(4) = \frac{16}{3} \approx 5.33 > 5$ و f متزايدة على $[2; +\infty[$ إذن $3 < b < 4$.

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \quad (6) \iff x^2 = 5(x - 1) \iff f(x) = 5 \iff \Delta = 25 - 20 = 5, \text{ الجذران:}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.382 \quad x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.618$$

وهما a و b وهذا يوافق التأطيرين.

7 من جدول التغيرات تجزئ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ إلى أربعة مجالات تكون f فيها مستمرة ورتيبة تمامًا، وصورها:

$]-\infty; 0]$	$[0; 1[$	$]1; 2]$	$[2; +\infty[$	المجال
$]-\infty; 0]$	$]-\infty; 0]$	$[4; +\infty[$	$[4; +\infty[$	f صورته بـ

نقارن m بصور المجالات فنجد:

- إذا كان $m < 0$: حلان (واحد في كل من المجالين الأولين).
- إذا كان $m = 0$: حل واحد هو $x = 0$ (مشارك بين المجالين الأولين).
- إذا كان $0 < m < 4$: لا يوجد حل.
- إذا كان $m = 4$: حل واحد هو $x = 2$.

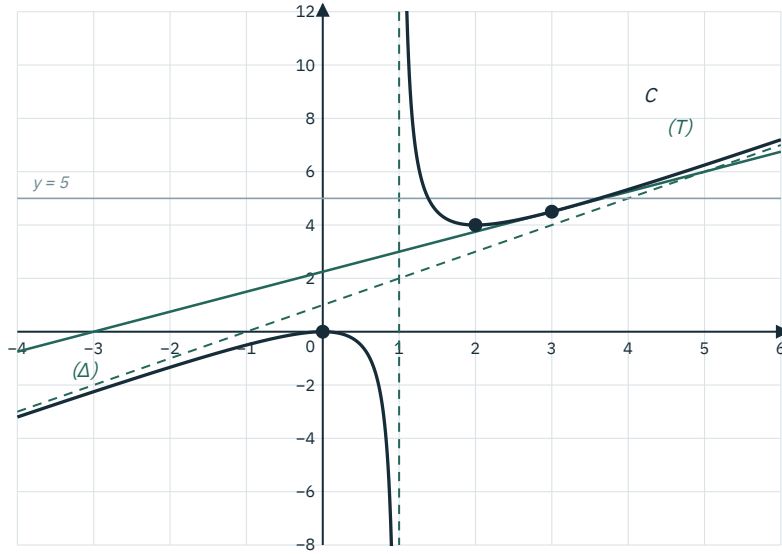
• إذا كان $m > 4$: حلان (واحد في كل من المجالين الأخيرين).

وللتحقق: $x^2 - mx + m = 0 \iff f(x) = m$ ومميزه $m^2 - 4m = m(m - 4)$.

m	$]4; +\infty[$	4	$]0; 4[$	0	$]-\infty; 0[$
عدد الحلول	2	1	0	1	2

(من أجل $m = 0$ الحل $x = 0$ وحده، ومن أجل $m = 4$ الحل $x = 2$ وحده).

(8) الرسم:



(C_f) يمر بالنقطتين $O(0; 0)$ (قيمة حدية محلية عظمى) و $(2; 4)$ (قيمة حدية محلية صغرى)، والمستقيم الرمادي $y = 5$ يقطعه في النقطتين ذواتي الفاصلتين $a \approx 1.38$ و $b \approx 3.62$.

حل التمرين الثاني - التقريب التآلفي وطريقة أولر

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ معرفة عند 4 : $f'(4) = \frac{1}{4}$ و $f(4) = 2$. التقريب التآلفي بجوار 4 :

$$f(4+h) \approx f(4) + f'(4)h = 2 + \frac{h}{4}$$

2) من أجل $h = 0.04$: $\sqrt{4.04} \approx 2 + \frac{0.04}{4} = 2.01$ (الآلة: 2.009975 ، الخطأ 2.5×10^{-5}). من أجل $h = -0.04$:

$\sqrt{3.96} \approx 2 - 0.01 = 1.99$ (الآلة: 1.989975 ، الخطأ 2.5×10^{-5}). التقريب جيد جدًا لأن h صغير.

3) نحسب في كل سطر $f'(x_k) = \frac{1}{2\sqrt{x_k}}$ ثم $y_{k+1} = y_k + 0.25f'(x_k)$

k	0	1	2	3	4
x_k	1	1.25	1.5	1.75	2
y_k	1.0000	1.1250	1.2368	1.3389	1.4334
$f'(x_k)$	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536
$\sqrt{x_k}$	1.0000	1.1180	1.2247	1.3229	1.4142

$y_4 \approx 1.4334$ بينما $\sqrt{2} \approx 1.4142$: الفرق ≈ 0.019 . طريقة أولر تعوّض المنحنى في كل خطوة بمماسه، ولأن f مقعرة فالمماسات فوق المنحنى فتكون القيم المحسوبة أكبر من القيم الحقيقية.

حل التمرين الثالث — دراسة دالة مثلثية

1) $f(x + 2\pi) = 2 \sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = 2 \sin x + \sin 2x = f(x)$ دورية دورها 2π . و
 $f(-x) = 2 \sin(-x) + \sin(-2x) = -2 \sin x - \sin 2x = -f(x)$ فردية. تكفي دراسة f على $[0; \pi]$ ، ثم نكمل بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ على $[-\pi; \pi]$ ثم بالانسحاب 2π .

2) $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$ و $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$$f'(x) = 2 \cos x + 4 \cos^2 x - 2 = 2(2 \cos^2 x + \cos x - 1)$$

$$= 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

3) على $[0; \pi]$: $\cos x + 1 \geq 0$ (وتتعدم فقط عند π). و $x \in [0; \frac{\pi}{3}] \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff 2 \cos x - 1 > 0$. إذن
 $f' > 0$ على $[0; \frac{\pi}{3}]$ و $f' < 0$ على $[\frac{\pi}{3}; \pi]$. القيم: $f(0) = 0$ ، $f(\frac{\pi}{3}) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ، $f(\pi) = 0$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

4) $f(0) = 0$ و $f'(0) = 2(2 - 1)(1 + 1) = 4$ المماس $y = 4x$.

5) المنحنى على $[-\pi; \pi]$ (متناظر بالنسبة إلى المبدأ، قيمة عظمى ≈ 2.6 عند $\frac{\pi}{3}$ وصغرى $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ عند $-\frac{\pi}{3}$):

