

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: جوان 2015

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقطة)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛
 نعتبر النقط $A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ ، $C(3;3;1)$ و $D(1;1;4)$.
 (1) تحقق أن النقط A ، B و C تعين مستويا وأن $x - y + z - 1 = 0$ معادلة ديكارتية له.
 (2) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثم تحقق أن مساحته هي $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة.
 (3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D .
 (4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .
 أ) عيّن إحداثيات النقطة E ثم احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .
 ب) عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$.
 (5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

- (I) عيّن العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .
 (II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب:

$$z_A = z_C \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{و} \quad z_B = \bar{z}_A \quad , \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (1) أ) اكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

$$\text{ب) تحقق أن العدد المركب } 2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} \text{ حقيقي.}$$

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

(ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z = k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يسمح $\mathbb{R}^+$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1+u_n)e^{-2} - 1$.

(1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1+u_n > 0$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. هل هي متقاربة؟ علّل.

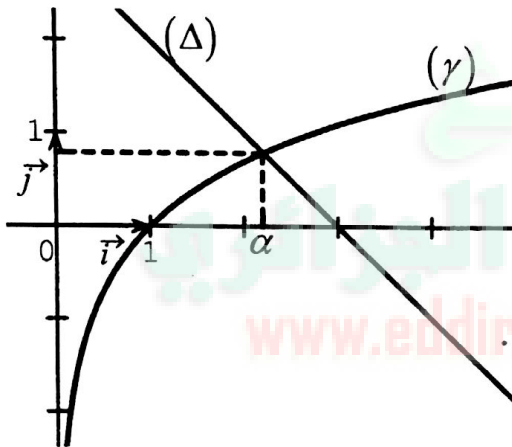
(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1+u_n)$.

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(ب) اكتب u_n و v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة

$y = -x + 3$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ).

(1) بقراءة بيانية حدّد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

(2) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن: $2,2 < \alpha < 2,3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ؛ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(III) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

(1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما.

(2) بين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ؛ ثم استنتج عبارة الدالة F .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛
 نعتبر النقط $A(2; 4; 1)$ ، $B(0; 4; -3)$ ، $C(3; 1; -3)$ و $D(1; 0; -2)$.
 أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية:
 (1) النقط A ، B و C ليست في استقامية.
 (2) $2x + 2y - z - 11 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 (3) النقط $E(3; 2; -1)$ هي المسقط العمودي للنقط D على المستوي (ABC) .
 (4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي.
 (5)
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$
 تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) .
 (6) يوجد عدنان حقيقيان α و β حيث النقط $I\left(\frac{3}{5}; 4; -\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، (z_A) هو مرافق (z_A) .
 (1) أ) اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسّي .
 ب) استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلّب تعيين مركزها ونصف قطرها .
 ج) أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .
 (2) أ) تحقّق أن:
$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

 ب) استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع وأن النقط O مركز ثقل هذا المثلث .
 ج) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$.
 (3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A .
 ب) أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (I) f الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني .
 (1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$.

(3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

(1) أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2, u_3 و v_0, v_1, v_2, v_3 دون حسابها.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(2) أ) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث: $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(3) أ) أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ ؛ ثم حدد نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{2x+2} g(-x)$.

ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ و متزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$.

(2) احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x - 1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

(5) أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0,1$.

(6) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$.

ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.