

سلسلة تمارين 1

الدالة الأسية: الخواص الجبرية والمعادلات والنهيات والدراسة

قواعد مستعملة (x و y عدنان حقيقيان و n عدد صحيح): $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{nx} = (e^x)^n$, $e^x > 0$.

الدالة $\exp$ متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$: $e^a = e^b \iff a = b$ و $e^a < e^b \iff a < b$, $e^x > 1 \iff x > 0$, $(e^x)' = e^x$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

☆☆★

التمرين 1 — تبسيط عبارات

بسط كل عبارة إلى أبسط شكل ممكن:

$$A = \frac{e^{3x} \times e^{-5x}}{e^x} \quad (1)$$

$$B = \frac{(e^{x+1})^2}{e^{2x-3}} \quad (2)$$

$$C = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \quad (3)$$

$$D = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 2 — إثبات متطابقات

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x (مع $x \neq 0$ في السؤال الثاني):

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (1)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (3)$$

$$(e^x + 1)^2 - 4e^x = (e^x - 1)^2 \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 3 — معادلات أسية

حل في $\mathbb{R}$ كل معادلة:

$$e^{2x-4} = 1 \quad (1)$$

$$e^{x^2} = e^{3x+4} \quad (2)$$

$$(e^x - 1)(e^x - e^3) = 0 \quad (3)$$

$$e^{2x} + 4 = 0 \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 4 — متراجحات أسية

حل في $\mathbb{R}$ كل متراجحة:

$$(1) \quad e^{3x+1} < e^{x-3}$$

$$(2) \quad e^{x^2} \geq e^{x+6}$$

$$(3) \quad e^{-2x+1} \leq 1$$

$$(4) \quad (e^x - 1)(e^x - e^2) > 0$$

☆☆☆

التمرين 5 — تغيير المتغير $X = e^x$

في كل حالة نضع $X = e^x$ (مع $X > 0$):

$$(1) \quad \text{حل المعادلة } e^{2x} - (1 + e^2)e^x + e^2 = 0$$

$$(2) \quad \text{حل المتراجحة } e^{2x} + (1 - e)e^x - e \leq 0$$

$$(3) \quad \text{حل المعادلة } e^x + e^{3-x} = e + e^2$$

☆☆☆

التمرين 6 — نهايات ومستقيمات مقاربة

$$(1) \quad f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} \text{ معرفة على } \mathbb{R}. \text{ احسب نهايتها عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ (في الحالة } +\infty \text{ اقسم البسط والمقام على } e^x \text{). استنتج مستقيمين مقاربين.}$$

$$(2) \quad g(x) = x + 1 - e^{-x} \text{ احسب نهايتها عند } +\infty \text{ وعند } -\infty. \text{ بيّن أن } (C_g) \text{ يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلًا } (\Delta) \text{ عند } +\infty \text{ وادرس وضعيّة } (C_g) \text{ بالنسبة إلى } (\Delta).$$

$$(3) \quad h(x) = e^{-2x} - e^{-x} \text{ احسب نهايتها عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ (في الحالة } -\infty \text{ أخرج } e^{-2x} \text{ عاملاً مشتركاً).}$$

$$(4) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

☆☆☆

التمرين 7 — دراسة الدالة $e^{2x} - 2e^{x+1}$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1}$ و (C_f) منحناها.

$$(1) \quad \text{احسب نهايتي } f \text{ عند } -\infty \text{ وعند } +\infty \text{ (اكتب } f(x) = e^x(e^x - 2e) \text{).}$$

$$(2) \quad \text{بيّن أن } f'(x) = 2e^x(e^x - e) \text{ ثم شكّل جدول تغيرات } f.$$

$$(3) \quad \text{اكتب معادلة المماس لـ } (C_f) \text{ عند النقطة ذات الفاصلة 1.}$$

$$(4) \quad \text{بيّن أن المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلًا وحيدًا } \alpha \text{ في }]1; +\infty[\text{ وأن } 1.69 < \alpha < 1.70.$$

$$(5) \quad \text{ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي } m \text{ عدد حلول المعادلة } f(x) = m.$$

★★★

التمرين 8 — دالة متناظرة ومماسها

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(1) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ بين أن f فردية، وأن

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ واستنتج مستقيمين مقاربين.

(3) بين أن $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ و $f'(x) = 1 - [f(x)]^2$. ثم شكّل جدول تغيرات f .

(4) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند 0. نضع $g(x) = x - f(x)$: احسب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) .

☆☆☆

التمرين 9 — المتراجحة $e^x \geq x + 1$ وتطبيقاتها

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x - x - 1$.

(1) ادرس تغيرات g ثم استنتج أنه من أجل كل x : $e^x \geq x + 1$.

(2) بتطبيق ذلك على $-x$ بين أنه من أجل كل $x < 1$: $x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

(3) استنتج تأطيرًا للعدد $e^{0.1}$ ثم قارنه مع $e^{0.1} \approx 1.10517$.

(4) استنتج من التأطير أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (من أجل $0 < x < 1$).

☆☆☆

التمرين 10 — المماس المار بالمبدأ

(C_f) هو منحنى الدالة $f : x \mapsto e^x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) اكتب معادلة المماس (T_a) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a .

(2) بين أنه يوجد مماس وحيد يمر بالمبدأ O وعيّن معادلته.

(3) بين أنه من أجل كل x : $e^x \geq ex$. (ادرس الدالة $k : x \mapsto e^x - ex$).

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

الحلول المفصلة

حل التمرين 1 — تبسيط عبارات

1) $A = \frac{e^{3x-5x}}{e^x} = \frac{e^{-2x}}{e^x} = e^{-3x}$

2) $B = \frac{e^{2x+2}}{e^{2x-3}} = e^{(2x+2)-(2x-3)} = e^5$ (عدد ثابت لا يتعلق بـ x).

3) بنشر المربعين:

$$C = (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})$$

$$= 4$$

$$D = e^x - 1 \text{ و } e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1^2 = (e^x - 1)(e^x + 1) \quad 4)$$

حل التمرين 2 - إثبات متطابقات

$$1) \frac{e^x - 1}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}} = e^{-x} - e^{-2x}$$

2) نضرب بسط ومقام الكسر الأول في e^x (غير معدوم): البسط $e^x (e^x + e^{-x}) = e^{2x} + 1$ والمقام $e^x (e^x - e^{-x}) = e^{2x} - 1$ والمقام $e^{2x} - 1 \neq 0$ لأن $x = 0 \iff e^{2x} = 1$

$$3) \text{ نضرب البسط والمقام في } e^x: \frac{1 \times e^x}{(1 + e^{-x})e^x} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$4) (e^x + 1)^2 - 4e^x = e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x = e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$$

حل التمرين 3 - معادلات أسية

$$1) S = \{2\} \quad e^{2x-4} = e^0 \iff 2x - 4 = 0 \iff x = 2$$

$$2) S = \{-1; 4\} : x = \frac{3 \pm 5}{2} \text{ و } \Delta = 9 + 16 = 25 \quad x^2 = 3x + 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$3) \text{ جداء معدوم: } e^x = 1 \text{ أي } x = 0 \text{ أو } e^x = e^3 \text{ أي } x = 3 \quad S = \{0; 3\}$$

$$4) e^{2x} > 0 \text{ إذن } e^{2x} + 4 > 4 > 0 \text{ ولا يمكن أن يساوي } 0 : S = \emptyset$$

حل التمرين 4 - متراجحات أسية

$$1) \text{ الدالة exp متزايدة تمامًا: } e^{3x+1} < e^{x-3} \iff 3x + 1 < x - 3 \iff x < -2 \quad S =]-\infty; -2[$$

$$2) e^{x^2} \geq e^{x+6} \iff x^2 - x - 6 \geq 0 \quad \text{جذرا } x^2 - x - 6 \text{ هما } -2 \text{ و } 3 \text{ والمعامل موجب ف } x^2 - x - 6 \geq 0 \text{ خارج الجذرين: } S =]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$$

$$3) S = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\quad e^{-2x+1} \leq e^0 \iff -2x + 1 \leq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

4) الجداء موجب تمامًا إذا كان العاملان من نفس الإشارة الصارمة:

$$\bullet \quad e^x - 1 > 0 \text{ و } e^x - e^2 > 0 \text{ أي } x > 0 \text{ و } x > 2 \text{ ف } x > 2$$

$$\bullet \quad e^x - 1 < 0 \text{ و } e^x - e^2 < 0 \text{ أي } x < 0 \text{ و } x < 2 \text{ ف } x < 0$$

$$S =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

حل التمرين 5 - تغيير المتغير $X = e^x$

1) تصبح المعادلة:

$$X^2 - (1 + e^2)X + e^2 = 0 \iff (X - 1)(X - e^2) = 0$$

إذن $e^x = e^2$ أو $e^x = 1$. $S = \{0; 2\}$.

2) نحلل: $X^2 + (1 - e)X - e = (X + 1)(X - e)$ المتراجحة:

$$(X + 1)(X - e) \leq 0 \iff -1 \leq X \leq e$$

ومع $X > 0$ نجد $0 < e^x \leq e$ أي $x \leq 1$. $S =]-\infty; 1]$.

3) بما أن $e^{3-x} = \frac{e^3}{e^x}$ تصبح المعادلة:

$$X + \frac{e^3}{X} = e + e^2 \iff X^2 - (e + e^2)X + e^3 = 0 \iff (X - e)(X - e^2) = 0$$

إذن $e^x = e^2$ أو $e^x = e$. $S = \{1; 2\}$.

حل التمرين 6 — نهايات ومستقيمات مقاربة

1

من أجل كل x لدينا:

$$f(x) = \frac{2 + e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

- عند $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
 - عند $-\infty$: $e^x \rightarrow 0$ فالبسط $\rightarrow 1$ والمقام $\rightarrow 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
- المستقيمان $y = 2$ (بجوار $+\infty$) و $y = 1$ (بجوار $-\infty$) مقاربان أفقيان.

2

- عند $+\infty$: $x + 1 \rightarrow +\infty$ و $e^{-x} \rightarrow 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- عند $-\infty$: $x + 1 \rightarrow -\infty$ و $-e^{-x} \rightarrow -\infty$ (لأن $e^{-x} \rightarrow +\infty$) إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

لدينا $g(x) - (x + 1) = -e^{-x}$ وهي تؤول إلى 0 عندما $x \rightarrow +\infty$: المستقيم $y = x + 1$ (Δ) مقارب مائل بجوار $+\infty$.
و $-e^{-x} < 0$ فالمنحنى ($\mathcal{C}_g$) تحت (Δ) على $\mathbb{R}$.

3

- عند $+\infty$: $e^{-2x} \rightarrow 0$ و $e^{-x} \rightarrow 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.
- عند $-\infty$: $h(x) = e^{-2x}(1 - e^x)$ مع $e^{-2x} \rightarrow +\infty$ و $1 - e^x \rightarrow 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$.

4

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \text{ وبوضع } X = 2x \rightarrow 0 \text{ النهاية } 2 \times 1 = 2. \\ \bullet \quad & \frac{e^x - 1}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow \frac{1}{3}. \\ \bullet \quad & \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{-x} \rightarrow 1 \text{ و } \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x} \text{ النهاية } 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

حل التمرين 8 — دالة متناظرة ومماسها

1

المقام $e^x + e^{-x} > 0$ فالدالة معرفة على $\mathbb{R}$ المتناظرة بالنسبة إلى 0:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -f(x)$$

ونضرب بسط ومقام $f(x)$ في e^x : $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

2

$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ و $e^{-2x} \rightarrow 0$ عند $+\infty$ ف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ وبما أن f فردية ف $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ (أو مباشرة من الشكل $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \rightarrow \frac{-1}{1}$). المستقيمان $y = 1$ و $y = -1$ مقاربان أفقيان.

3

بوضع $u = e^{2x}$: $f = \frac{u - 1}{u + 1}$ و $f' = \frac{2u'}{(u + 1)^2}$ و $f' = \frac{u'(u + 1) - (u - 1)u'}{(u + 1)^2} = \frac{2u'}{(u + 1)^2}$ و $u' = 2e^{2x}$ ف $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0$ من جهة أخرى:

$$\begin{aligned} 1 - [f(x)]^2 &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

$-\infty$	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
-1	$\nearrow$	$f(x)$

4

$f(0) = 0$ و $f'(0) = 1 - 0 = 1$ و $y = x$ في (T) . $[f(x)]^2 \geq 0$ و $f'(x) = 1 - f'(x) = [f(x)]^2 \geq 0$ و $g'(x) = 1 - f'(x)$ لا تنعدم إلا عند $x = 0$ (لأن $g(0) = 0$ و $f(x) = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$). إذن g متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ و $g(0) = 0$ ومنه:

- إذا كان $x > 0$: $g(x) > 0$ أي $f(x) < x$ والمنحنى (C_f) تحت (T) .
 - إذا كان $x < 0$: $g(x) < 0$ أي $f(x) > x$ والمنحنى (C_f) فوق (T) .
- فالمنحنى يقطع مماسه عند O (نقطة انعطاف). مثال: $f(1) \approx 0.7616 < 1$.

حل التمرين 9 — المتراجحة $e^x \geq x + 1$ وتطبيقاتها

1

$g'(x) = e^x - 1$ وهي سالبة على $]-\infty; 0[$ وموجبة على $]0; +\infty[$ و $g(0) = 0$.

$-\infty$	0	$+\infty$	x
	0	+	$g'(x)$
$+\infty$	0	$+\infty$	$g(x)$

القيمة الصغرى ل g هي 0 ف $g(x) \geq 0$ أي $e^x \geq x + 1$ (والمساواة فقط عند $x = 0$).

2

بتعويض x بـ $-x$: $e^{-x} \geq 1 - x$. إذا كان $x < 1$ فإن $1 - x > 0$ ومنه $\frac{1}{e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - x}$ أي $e^x \leq \frac{1}{1 - x}$. إذن $x + 1 \leq e^x \leq \frac{1}{1 - x}$.

3

من أجل $x = 0.1$: $e^{0.1} \approx 1.1111$ و $1.1 \leq e^{0.1} \leq \frac{1}{0.9}$. القيمة 1.10517 تحقق التأطير.

4

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ف $e^x \geq x + 1$ (مبرهنة المقارنة). ومن أجل $0 < x < 1$:
 $x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x}$ ونقسم على $x > 0$:
 $1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$
 و $\frac{1}{1 - x} \rightarrow 1$ عندما $x \rightarrow 0^+$ فمبرهنة الحصر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

حل التمرين 10 — المماس المار بالمبدأ

1

$f'(a) = e^a$ ف $y = e^a(x - a) + e^a = e^a(x - a + 1)$.

2

$0 = e^a(0 - a + 1) \iff e^a(1 - a) = 0 \iff a = 1$ لأن $e^a > 0$. المماس الوحيد:
 $(T_1) : y = ex$.

3

$k'(x) \geq 0 \iff e^x \geq e^1 \iff x \geq 1$ و $k'(x) = e^x - e$ إذن k متناقصة على $]-\infty; 1]$ و متزايدة على $[1; +\infty[$
و قيمتها الصغرى $k(1) = e - e = 0$. ومنه $k(x) \geq 0$ أي $e^x \geq e$: المنحنى (C_f) يقع فوق مماسه (T_1) .