

ورقة أنشطة

أنشطة تمهيدية: من نسبة التغير إلى العدد المشتق

تكتشف في هذه الأنشطة كيف تقود نسبة التغير بين نقطتين متقاربتين إلى مفهوم العدد المشتق ثم إلى المماس. أنجز الحسابات بالآلة الحاسبة ثم بزرها جبريًا.

☆☆★

النشاط 1 — السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية

يسقط جسم سقوطًا حرًا، والمسافة المقطوعة (بالمتر) بعد t ثانية هي $d(t) = 5t^2$.

(1) احسب السرعة المتوسطة $v_m(h) = \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$ بين اللحظتين $t = 2$ و $t = 2 + h$ من أجل $h = 1$ ثم 0.1 ثم 0.01 ثم 0.001 .

(2) بيّن أن $v_m(h) = 20 + 5h$ من أجل كل $h \neq 0$.

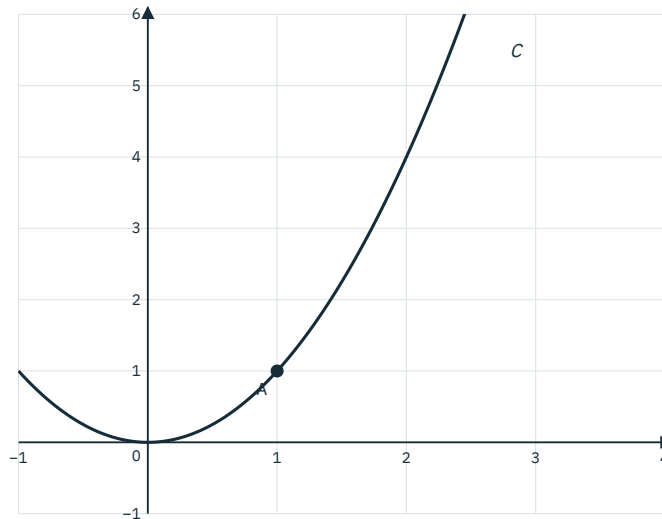
(3) ماذا يحدث لـ $v_m(h)$ عندما يؤول h إلى 0؟ ماذا تمثل النتيجة فيزيائيًا؟

1	0.1	0.01	0.001	h
...	...	...	...	$v_m(h)$

☆☆★

النشاط 2 — من القاطع إلى المماس

f هي الدالة $x \mapsto x^2$ ومنحنائها (C_f) . نعتبر النقطة $A(1; 1)$ ومن أجل كل $h \neq 0$ النقطة $M_h(1+h; f(1+h))$ من (C_f) .



(1) احسب ميل القاطع (AM_h) أي $t(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ واكتبه بدلالة h .

(2) على الشكل: ارسم القواطع (AM_h) من أجل $h = 2$ ثم $h = 1$ ثم $h = 0.5$ (النقط $M_1(2; 4)$ و $M_2(3; 9)$ و $M_{0.5}(1.5; 2.25)$).

(3) ماذا تلاحظ على ميول هذه القواطع عندما يقترب h من 0؟ خمن موضع القاطع عندئذٍ ثم أعط معادلته.

☆☆☆

النشاط 3 — من اليمين ومن اليسار

g هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}^*$. نعتبر نسبة التغير عند 2: $\tau(h) = \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ من أجل $h \neq 0$ و $h \neq -2$.

1	0.1	0.01	h
...	...	...	$\tau(h)$

قيم موجبة

-1	-0.1	-0.01	h
...	...	...	$\tau(h)$

قيم سالبة

(1) أكمل الجدولين (4 أرقام عشرية).

(2) بين أن $\tau(h) = \frac{-1}{2(2+h)}$.

(3) احسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h)$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h)$. ماذا تستنتج؟

(4) اكتب معادلة المماس لمنحنى g عند النقطة ذات الفاصلة 2.

☆☆☆

النشاط 4 — عندما لا يوجد عدد مشتق

الجزء أ: القيمة المطلقة

$f(x) = |x|$. نعتبر $\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ من أجل $h \neq 0$.

(1) احسب $\tau(h)$ إذا كان $h > 0$ ثم إذا كان $h < 0$.

(2) ماذا تستنتج بخصوص $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$ ؟ هل f قابلة للاشتقاق عند 0؟ فسر هندسيًا بالاستعانة بالمنحنى.

الجزء ب: الجذر التربيعي

$g(x) = \sqrt{x}$ على $[0; +\infty[$. $\tau(h) = \frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h}$ من أجل $h > 0$.

(1) احسب $\tau(h)$ من أجل $h = 1$ ثم 0.01 ثم 0.0001.

(2) بين أن $\tau(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$ ثم احسب $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h)$. ماذا يمثل ذلك بالنسبة لمنحنى g عند 0؟

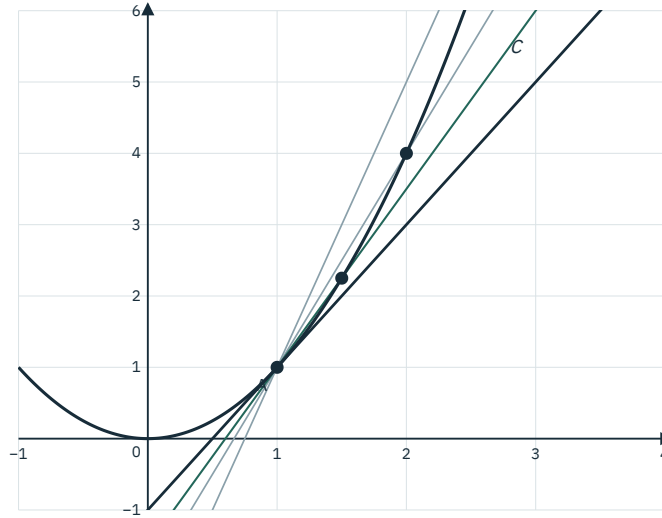
حل النشاط 2 — من القاطع إلى المماس

1

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \end{aligned}$$

2

ميول القواطع: $h = 0.5 \Rightarrow 2.5, h = 1 \Rightarrow 3, h = 2 \Rightarrow 4$. معادلة كل منها $y = t(h)(x - 1) + 1$. ثم $y = 4x - 3$ ثم $y = 3x - 2$ ثم $y = 2.5x - 1.5$.



3

$t(h) = 2 + h$ يقترب من 2 عندما يؤول h إلى 0: ميول القواطع تقترب من 2 والقاطع (AM_h) يقترب من المستقيم المار بـ A والذي ميله 2، وهو مماس (C_f) عند A . معادلته: $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$. إذن $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 2$.

حل النشاط 3 — من اليمين ومن اليسار

1

1	0.1	0.01	h
-0.1667	-0.2381	-0.2488	$\tau(h)$
-1	-0.1	-0.01	h
-0.5000	-0.2632	-0.2513	$\tau(h)$

2

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{2(2+h)h} = \frac{-1}{2(2+h)}\end{aligned}$$

3

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h) = \frac{-1}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

النهايتان من اليمين ومن اليسار متساويتان، فنسبة التغير تقبل نهاية عند 0: g قابلة للاشتقاق عند 2 و $g'(2) = -\frac{1}{4}$.

4

$$g(2) = \frac{1}{2}, \text{ المماس: } y = g'(2)(x-2) + g(2) = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} \text{ أي } y = -\frac{1}{4}x + 1$$

حل النشاط 4 — عندما لا يوجد عدد مشتق

الجزء أ - 1

$$\tau(h) = \frac{h}{h} = 1 : h > 0 \text{ وإذا كان } h < 0 : \tau(h) = \frac{-h}{h} = -1 \text{ ف } |\tau(h)| = 1 \text{ ف } \tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$$

الجزء أ - 2

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0^-} \tau(h) = -1$. النهايتان مختلفتان فلا توجد نهاية لـ τ عند 0: الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0. هندسيًا للمنحنى نصفًا مماس عند O : ميل 1 من اليمين وميل -1 من اليسار، والنقطة O نقطة زاوية.

الجزء ب - 1

1	0.01	0.0001	h
1	10	100	$\tau(h)$

الجزء ب - 2

من أجل $h > 0$: $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. وعندما $h \rightarrow 0^+$: $\sqrt{h} \rightarrow 0^+$ ف $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tau(h) = +\infty$. g غير قابلة للاشتقاق عند 0، ومنحنىها يقبل عند O مماسًا شاقوليًا (محور الترتيب).