

ورقة أنشطة

أنشطة تمهيدية: اكتشاف الدالة الأسية

قبل الدرس، تكتشف في هذه الأنشطة دالة غير عادية: دالة قابلة للاشتقاق تساوي مشتقتها وتأخذ القيمة 1 عند 0. نقبل وجود هذه الدالة ونستكشف خواصها بالحساب العددي ثم بالبرهان. استعمل الآلة الحاسبة عند الحاجة.

☆☆★

النشاط 1 — طريقة أولر والعدد المحتمل

نفرض وجود دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $f' = f$ و $f(0) = 1$. من أجل h صغير نستعمل التقريب التآلفي:

$$f(x+h) \approx f(x) + h f'(x) = f(x)(1+h)$$

(1) نأخذ $h = 0.1$ ونضع $y_k \approx f(0.1k)$. اكتب العلاقة بين y_k و y_{k+1} ثم أكمل الجدول.

(2) بين أن $y_k = 1.1^k$ ثم أكمل الجدول الثاني الذي يعطي القيمة التقريبية لـ $f(1)$ عندما نأخذ خطوة h أصغر ($1/h$ خطوة للوصول إلى $x = 1$): $f(1) \approx (1+h)^{1/h}$.

(3) ماذا تلاحظ؟ خمن القيمة التي تقترب منها $f(1)$.

(4) نمشي الآن إلى اليسار: $f(x-h) \approx f(x)(1-h)$. احسب القيمة التقريبية لـ $f(-1)$ بخطوة $h = 0.1$ ثم 0.01 ثم 0.001 ثم قارنها مع $\frac{1}{f(1)}$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	k
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	x_k
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	y_k

0.1	0.01	0.001	0.0001	h
...	...	...	...	$(1+h)^{1/h}$

☆☆★

النشاط 2 — خواص الدالة التي تساوي مشتقتها

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقق $f' = f$ و $f(0) = 1$. نقبل أنها الدالة الوحيدة التي تحقق هذين الشرطين.

(1) نعتبر الدالة $f(-x)$ و $f(x)$: $h : x \mapsto f(x)$. احسب $h'(x)$ ثم استنتج أن h ثابتة وعين قيمتها.

(2) استنتج أن $f(x) \neq 0$ من أجل كل x وأن $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

(3) بما أن f مستمرة وتحقق $f(0) = 1$ فماذا تقول عن إشارة f ؟ استنتج اتجاه تغير f .

(4) نثبت عددًا حقيقيًا y ونعتبر الدالة $i : x \mapsto \frac{f(x+y)}{f(y)}$. بين أن $i' = i$ و $i(0) = 1$ ثم استنتج أن $f(x+y) = f(x)f(y)$.

(5) استنتج عبارة $f(x-y)$ بدلالة $f(x)$ و $f(y)$ ثم $f(2x)$ و $f(3x)$ بدلالة $f(x)$.



النشاط 3 — تخمين الخواص بالآلة الحاسبة

نرمز بـ $\exp(x)$ أو e^x إلى الدالة الأسية. تعطي الآلة الحاسبة (مفتاح e^x) القيم التالية مدورة إلى 10^{-4} :

x	3	2	1	0	-1	-2
e^x	20.0855	7.3891	2.7183	1.0000	0.3679	0.1353

(1) احسب $e^3 \times e^2$ وقارنه مع $e^5 \approx 148.4132$. احسب $e^{-1} \times e^1$ و $\frac{e^3}{e^2}$ و $(e^2)^3$ وقارن كل نتيجة مع قيمة e^p المناسبة ($e^6 \approx 403.4288$). ماذا تخمّن؟

(2) أكمل الجدول التالي (4 أرقام عشرية) ثم خمّن النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ وفسرها بدلالة العدد المشتق للدالة $\exp$ عند 0.

(3) اكتب معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة $\exp$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 (استعمل $\exp' = \exp$). تحقق على الجدول الأول أن $e^x \geq x + 1$ من أجل $x = -2$ و -1 و 0 و 1 و 2 .

h	-0.001	-0.01	-0.1	0.001	0.01	0.1
$\frac{e^h - 1}{h}$	...	...	...	...	...	...



النشاط 4 — تناقص كمية دواء

تناقص كمية دواء في الدم بمعدل يتناسب مع الكمية الموجودة. إذا كانت $q(t)$ هي الكمية بالملغ بعد t ساعة فإن $q'(t) = -0.2q(t)$ و $q(0) = 100$.

(1) بطريقة أولر وبخطوة $h = 0.5$: $q(t + 0.5) \approx q(t) + 0.5q'(t)$. اكتب $q(t + 0.5)$ بدلالة $q(t)$ وأكمل الجدول من $t = 0$ إلى $t = 2$.

(2) نأخذ خطوة $h = 0.1$ (20 خطوة للوصول إلى $t = 2$). احسب القيمة المقربة لـ $q(2)$.

(3) نقترح الدالة $Q: t \mapsto 100e^{-0.2t}$. تحقق أن $Q(0) = 100$ وأن $Q'(t) = -0.2Q(t)$ (استعمل مشتقة الدالة المركبة $\exp(-0.2t) \mapsto \exp(-0.2t)$ مع $\exp' = \exp$).

(4) احسب $Q(1)$ و $Q(2)$ وقارنهما مع القيم المقربة بطريقة أولر. ثم احسب $\frac{Q(t+1)}{Q(t)}$ ماذا تلاحظ؟

t	2	1.5	1	0.5	0
(أولر) $q(t)$	...	...	...	...	...

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل النشاط 1 — طريقة أولر والعدد المحتمل

1

$$y_0 = f(0) = 1 \text{ مع } y_{k+1} \approx f(x_k + 0.1) \approx y_k(1 + 0.1) = 1.1 y_k$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	k
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	x_k
1.0000	1.1000	1.2100	1.3310	1.4641	1.6105	1.7716	1.9487	2.1436	2.3579	2.5937	y_k

2

المتتالية (y_k) هندسية أساسها 1.1 وحدها الأول 1 ف $y_k = 1.1^k$ وبالتالي $y_{10} = 1.1^{10} \approx 2.5937$ من أجل خطوة h نحتاج إلى $\frac{1}{h}$ خطوة فنجد $(1+h)^{1/h}$:

0.1	0.01	0.001	0.0001	h
2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	$(1+h)^{1/h}$

3

كلما صغرت الخطوة h ازدادت القيمة المحسوبة واستقرت تدريجياً قرب 2.718. نخمن أن $f(1) \approx 2.718$. هذا العدد يسمى e وسنراه في الدرس.

4

$$\text{نجد } f(-1) \approx (1-h)^{1/h}$$

0.1	0.01	0.001	h
0.3487	0.3660	0.3677	$(1-h)^{1/h}$

وبالمقارنة $0.3679 \approx \frac{1}{2.718}$. القيم تقترب منه، فنخمن أن $f(-1) = \frac{1}{f(1)}$ ، وأعم من ذلك $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ (سنبرهن ذلك في النشاط الثاني).

حل النشاط 2 — خواص الدالة التي تساوي مشتقتها

1

$$\mathbb{R} \text{ إذن } h \text{ ثابتة على } \mathbb{R} \text{ لأن } h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

$$\text{وقيمتها } h(0) = f(0)^2 = 1$$

2

$$f(x)f(-x) = 1 \text{ من أجل كل } x \text{ فالجداء غير معدوم فكل من العاملين غير معدوم: } f(x) \neq 0 \text{ و } f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

3

f مستمرة ولا تنعدم على $\mathbb{R}$ فهي تحافظ على إشارة ثابتة (مبرهنة القيم المتوسطة) وبما أن $f(0) = 1 > 0$ فإن $f(x) > 0$ من أجل كل x . إذن $f'(x) = f(x) > 0$ و f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

4

$f(y) \neq 0$ والدالة i قابلة للاشتقاق ومشتقتها:

$$i'(x) = \frac{f'(x+y)}{f(y)} = \frac{f(x+y)}{f(y)} = i(x)$$

و $i(0) = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$. فالدالة i تحقق نفس الشرطين المميزين لـ f ، وبما أن f هي الدالة الوحيدة التي تحققهما فإن $i = f$ أي $\frac{f(x+y)}{f(y)} = f(x)$

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

5

$$f(x-y) = f(x)f(-y) = \frac{f(x)}{f(y)}.$$

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)^2.$$

$$f(3x) = f(2x+x) = f(x)^2 f(x) = f(x)^3.$$

وبصفة عامة $f(nx) = [f(x)]^n$. بما أن $f(1) = e$ فإن $f(n) = e^n$ من أجل كل عدد صحيح n ، وهذا ما يبرر الكتابة $f(x) = e^x$.

حل النشاط 3 — تخمين الخواص بالآلة الحاسبة

1

$$e^5 = e^{2+3} \text{ وهو } e^2 \times e^3 \approx 7.3891 \times 20.0855 \approx 148.41.$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ إذن } e^{-1} \times e^1 \approx 0.3679 \times 2.7183 \approx 1 = e^0.$$

$$\frac{e^3}{e^2} \approx \frac{20.0855}{7.3891} \approx 2.7183 = e^1 = e^{3-2}.$$

$$(e^2)^3 \approx 7.3891^3 \approx 403.43 = e^6 = e^{2 \times 3}.$$

$$\text{نخمن: } e^{x+y} = e^x e^y \text{ و } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ و } e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \text{ و } e^{nx} = (e^x)^n.$$

2

0.1	0.01	0.001	-0.1	-0.01	-0.001	h
1.0517	1.0050	1.0005	0.9516	0.9950	0.9995	$\frac{e^h - 1}{h}$

النسبة تقترب من 1 سواء كان h موجبًا أو سالبًا: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. وهذه النسبة هي $\frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h}$ فنهايتها هي العدد المشتق $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ وهو ما نتوقعه.

3

$\exp(0) = 1$ و $\exp'(0) = 1$ إذن $y = 1 \times (x - 0) + 1 = x + 1$ على الجدول: $e^{-2} \approx 0.135 \geq -1$ و $e^2 \approx 7.389 \geq 3$ و $e^1 \approx 2.718 \geq 2$ و $e^0 = 1 \geq 1$ و $e^{-1} \approx 0.368 \geq 0$ في هذه القيم.

حل النشاط 4 — تناقص كمية دواء

1

$q(t + 0.5) \approx q(t) - 0.5 \times 0.2 q(t) = 0.9 q(t)$ نضرب في كل خطوة في 0.9:

0	0.5	1	1.5	2	t
100.00	90.00	81.00	72.90	65.61	$q(t)$ (أولر)

2

في كل خطوة نضرب في $1 - 0.1 \times 0.2 = 0.98$ إذن $q(2) \approx 100 \times 0.98^{20} \approx 66.76$

3

$Q(0) = 100e^0 = 100$ وبوضع $u(t) = -0.2t$ فإن $Q(t) = 100 \exp(u(t))$ و $Q'(t) = 100 u'(t) \exp(u(t)) = 100 \times (-0.2) e^{-0.2t} = -0.2 Q(t)$

4

$Q(1) \approx 81.87$ و $Q(2) \approx 67.03$ بينما أولر بخطوة 0.5 أعطى 81 و 65.61 وبخطوة 0.1 أعطى 66.76. كلما صغرت الخطوة اقتربت قيم أولر من قيم Q ، ما يدل على أن Q هي حل المسألة.

$$\frac{Q(t+1)}{Q(t)} = \frac{100 e^{-0.2t-0.2}}{100 e^{-0.2t}} = e^{-0.2} \approx 0.8187$$

النسبة ثابتة: في كل ساعة تفقد الكمية نحو 18.1% من قيمتها السابقة. عمومًا الدالة $y_0 e^{kt}$ تحقق $y' = ky$ و $y(0) = y_0$ ؛ تزايد إذا كان $k > 0$ وتناقص إذا كان $k < 0$.