

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- نضع من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = z^3 - 24\sqrt{3}$.

أ) تحقق أن $P(2\sqrt{3}) = 0$.

ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2\sqrt{3})(z^2 + az + b)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على

الترتيب: $z_C = 2\sqrt{3}$ و $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_A = -\sqrt{3} + 3i$.

أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

ب) بين أنه يوجد دوران r مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

د) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$ ، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث: $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(العدد $\bar{z}$ هو مرافق العدد z).

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;0;2)$

وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1;-1)$ وليكن (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط التالي: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + \lambda; (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

ب) بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2- أ) بين أن النقطة $B(-1;3;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ') .

ب) تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

ج) استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ') .

3- لنكن N نقطة إحداثياتها $(-2+t; 2+t; t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$ ولتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $h(t) = AN^2$.

أ) بين أن النقطة N تنتمي إلى المستقيم (Δ') ، ثم اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t .

ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AN أصغر ما يمكن. ثم قارن بين القيمة

الصغرى للدالة h والمسافة AB .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0; 4]$ كما يلي : $f(x) = \frac{13x}{9x+13}$
- 1- أ) بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال I .
 - ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .
 - 2- لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .
 - أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 4$.
 - ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنّها متقاربة.
 - 3- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \neq 0$.
 - 4- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$.
 - أ) برهن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .
 - ب) اكتب v_n بدلالة n .
 - ج) استنتج أنّ: $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I- لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$ (حيث العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).
 - 1- ادرس تغيّرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 - 2- بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث: $-0,34 < \alpha < -0,33$.
 - 3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$.
- II- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.
 - أ) (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - 1- أ) بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.
 - ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ (f' هي مشتقة الدالة f).
 - ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
 - د) ارسم المنحنى (C_f) . (نقبل أنّ: $f(\alpha) \approx 3.16$)
 - 2- أ) بيّن أنّ الدالة: $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.
 - ب) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.
 - 3- نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ: $k(x) = f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
 - أ) بيّن أنّ الدالة k زوجية.
 - ب) بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالة k).
 - ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x) = m$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ونعتبر النقط $A(2;1;-3)$ ، $B(0;-1;2)$ و $C(-3;-1;-1)$

- 1- أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
- ب) بين أن المعادلة: $2x - 7y - 2z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- 2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (BC) .
- 3- أ) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P) .
- ب) بين أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC .
- 4- ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $[AC]$ في المثلث ABC .

$$\text{أ) بين أن الجملة : } k \in \mathbb{R} \quad ; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = -2 - 4k \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي للمستقيم } (\Delta).$$

ب) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) بين أن المثلث ABC متساوي الساقين .

د) ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5- عيّن طبيعة وعناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$.

التمرين الثاني: (4.50 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E) \quad 2\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - 3\bar{z} + 5 = 0$.

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1- أ) أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(2\bar{z} + 5)(\bar{z}^2 - \bar{z} + 1) = 0$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D التي

$$\text{لواحقها على الترتيب : } z_A = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_C = -1, \quad z_D = -\frac{5}{2}$$

أ) اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

ب) أنشئ النقط A ، B ، C و D .

ج) أثبت أن : $z_B - z_C = z_B(z_A - z_C)$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC .

4- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z + 1 = kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين الثالث: (4,50 نقاط)

- (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n
- ب: $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
- 1- بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .
- 2- (أ) عبّر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n .
- (ب) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 3- (أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
- (ب) تحقق أن: $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

(ج) استنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

- I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2e^x - x^2 - x$.
- 1- (أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)
- (ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) > 0$.
- (ج) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
- 2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1,38 < \alpha < -1,37$.
- 3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .
- II- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - x}$.
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x e^x g(x)}{(e^x - x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).
- (ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.
- 2- (أ) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 2 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
- (ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.
- (ج) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha) \approx 0.29$)