

سلسلة تمارين 1

النهايات عند ∞ وعند عدد حقيقي والمستقيمات المقاربة

ملاحظة: نهايات الدوال الناطقة عند $\pm\infty$ تُحسب بإخراج الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام. أما حالات عدم التعيين $\infty - \infty$ و $0 \times \infty$ و $\frac{0}{0}$ فهي موضوع السلسلة 2. المطلوب في كل تمرين نتيجة مبصرة بالحساب.
المستوى: ★ تطبيق مباشر، ★★ متوسط، ★★★ يتطلب ربط عدة نتائج.

☆☆★

التمرين 1 — كثيرات الحدود عند ما لا نهاية

احسب نهاية كل دالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$$(1) \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$$

$$(2) \quad g(x) = -3x^2 + x - 1$$

$$(3) \quad h(x) = -2x^5 + x^2 - 3$$

☆☆★

التمرين 2 — دوال ناطقة عند ما لا نهاية

احسب نهاية كل دالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$$(1) \quad f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 4}$$

$$(2) \quad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) \quad h(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^2 - x}$$

☆☆★

التمرين 3 — نهايات عند عدد حقيقي

$$(1) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$(2) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 1}{x - 2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{x - 2}$$

$$(3) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{(x - 1)^2}$$

$$(4) \quad \text{احسب } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1 - 2x}{x^2 - 9} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 2x}{x^2 - 9}$$

☆☆★

التمرين 4 — دالة هوموغرافية ومستقيمتها المقاربة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$ و (C_f) منحناها.

(1) احسب نهايات f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند -3 (من اليمين ومن اليسار).

(2) استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى (C_f) وأعط معادلتيهما.

(3) تحقق أنه من أجل كل $x \neq -3$: $f(x) - 2 = \frac{-7}{x+3}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم الذي معادلته $y = 2$.

☆☆☆

التمرين 5 — مستقيم مقارب مائل

f دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. ماذا تستنتج؟

(2) عيّن العددين a و b بحيث $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ من أجل كل $x \neq 1$ (حدد أيضًا c).

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم يبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

☆☆☆

التمرين 6 — دوال تحوي جذرًا تربيعيًا

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x - 2}$.

(2) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ على $]1; +\infty[$: احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ واستنتج مستقيمين مقاربين.

(3) $h(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ على $]0; +\infty[$: احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ واستنتج مستقيمين مقاربين.

☆☆☆

التمرين 7 — تعيين دالة من مستقيمتها المقاربة

f دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-c\}$ بـ: $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية. المنحنى (C_f) يقبل المستقيم $x = -2$ مقاربًا شاقوليًا والمستقيم $y = 3$ مقاربًا أفقيًا، ويشمل النقطة $A(0; -1)$.

(1) عيّن a و b و c .

(2) من أجل $a = 3$ و $b = -2$ و $c = 2$: احسب نهايات f عند -2 من اليمين ومن اليسار، وادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم $y = 3$.

(3) عيّن فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

☆☆☆

التمرين 8 — دالة ناطقة بمستقيمين مقاربين شاقولين

f دالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ بـ: $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 4}$.

(1) احسب نهايات f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

(2) احسب نهايات f عند 2 و -2 (من كل جهة).

(3) استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

(4) يبين أن $f(x) - 2 = \frac{8 - 3x}{x^2 - 4}$ ثم ادرس إشارة $f(x) - 2$ في جدول واستنتج الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم $y = 2$.

★★★

التمرين 9 — تعريف النهاية

(1) بين باستعمال التعريف أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$: أوجد عددًا α بحيث $x > \alpha \Rightarrow x^2 - 3 > 1000$.

(2) نعتبر $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ على $]-1; +\infty[$. بين أن $f(x) - 2 = \frac{1}{x+1}$ ثم أوجد عددًا α بحيث $x > \alpha \Rightarrow |f(x) - 2| < 0.01$.

(3) ماذا تستنتج عن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؟

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

الحلول المفصلة

حل التمرين 1 — كثيرات الحدود عند ما لا نهاية

نخرج الحد الأعلى درجة عاملاً مشتركاً (من أجل $x \neq 0$)، ونستعمل أن $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x^2}$... تؤول إلى 0 عند $\pm\infty$.

(1) الدالة f

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3} \right)$$

المعامل بين القوسين يؤول إلى 1، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(2) الدالة g

$$g(x) = x^2 \left(-3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

المعامل يؤول إلى -3 و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$ ، إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

(3) الدالة h

$$h(x) = x^5 \left(-2 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^5} \right)$$

المعامل يؤول إلى -2، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$$

قاعدة: نهاية كثير حدود عند $\pm\infty$ هي نهاية حده الأعلى درجة.

حل التمرين 2 — دوال ناطقة عند ما لا نهاية

(1) الدالة f

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} \end{aligned}$$

البسط يؤول إلى 3 والمقام إلى 1:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

(2) الدالة g

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{x}}{x \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \end{aligned}$$

البسط يؤول إلى 2، والمقام جداء عاملين: x يؤول إلى $\pm\infty$ والآخر إلى 1، أي أن المقام يؤول إلى $\pm\infty$. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

(3) الدالة h

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} \right)} \\ &= x \times \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

الكسر يؤول إلى $\frac{1}{2}$. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

قاعدة: نهاية دالة ناطقة عند $\pm\infty$ هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة في البسط والمقام.

حل التمرين 3 — نهايات عند عدد حقيقي

1

دالة كثير حدود، النهاية عند 1 هي قيمتها عند 1: $2(1)^2 - 3(1) + 4 = 3$ إذن $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 4) = 3$

2

عندما $x \rightarrow 2$ يؤول البسط $3x + 1$ إلى $7 > 0$ والمقام $x - 2$ إلى 0. إشارة المقام موجبة إذا كان $x > 2$ وسالبة إذا كان $x < 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{x - 2} = \frac{7}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 1}{x - 2} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

3

البسط يؤول إلى $1 + 3 = 4 > 0$ ، والمقام $(x - 1)^2$ يؤول إلى 0 بقيم موجبة من الجهتين. إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{(x - 1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

4

البسط يؤول إلى $1 - 6 = -5 < 0$ ، والمقام $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ حيث $x + 3 > 0$ بجوار 3 وإشارته إشارة $x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 2x}{x^2 - 9} = \frac{-5}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1 - 2x}{x^2 - 9} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

حل التمرين 4 — دالة هوموغرافية ومستقيمتها المقاربة

1

$$f(x) = \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

عند -3 : البسط يؤول إلى $2(-3) - 1 = -7 < 0$ ، والمقام $x + 3$ يؤول إلى 0^+ من اليمين و 0^- من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{-7}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

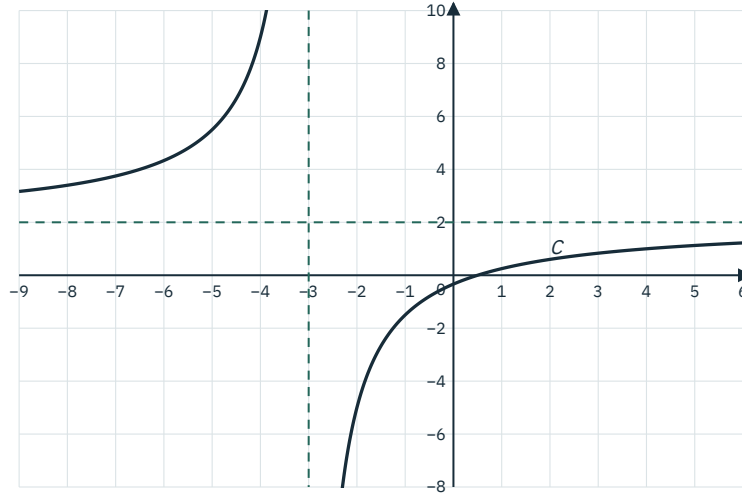
2

إذن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ المستقيم $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -3} |f(x)| = +\infty$ إذن المستقيم $x = -3$ مقارب شاقولي.

3

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x - 1}{x + 3} - 2 = \frac{2x - 1 - 2(x + 3)}{x + 3} \\ &= \frac{2x - 1 - 2x - 6}{x + 3} = \frac{-7}{x + 3} \end{aligned}$$

إذا كان $x > -3$ فإن $f(x) - 2 < 0$: المنحنى تحت المستقيم $y = 2$. إذا كان $x < -3$ فإن $f(x) - 2 > 0$: المنحنى فوقه.
(لا تقاطع لأن $\frac{-7}{x+3} \neq 0$)



حل التمرين 5 — مستقيم مقارب مائل

1

البسط يؤول إلى $1 - 1 + 3 = 3 > 0$ والمقام إلى 0^+ (من اليمين) أو 0^- (من اليسار):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

إذن المستقيم $x = 1$ مقارب شاقولي للمنحنى (C_f) .

2

نجز القسمة: $x^2 - x + 3 = x(x - 1) + 3$. إذن:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x - 1) + 3}{x - 1} \\ &= x + \frac{3}{x - 1} \end{aligned}$$

أي $a = 1$ و $b = 0$ و $c = 3$.

3

$f(x) = x + \frac{3}{x - 1}$ حيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 1} = 0$. إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. ولدينا:

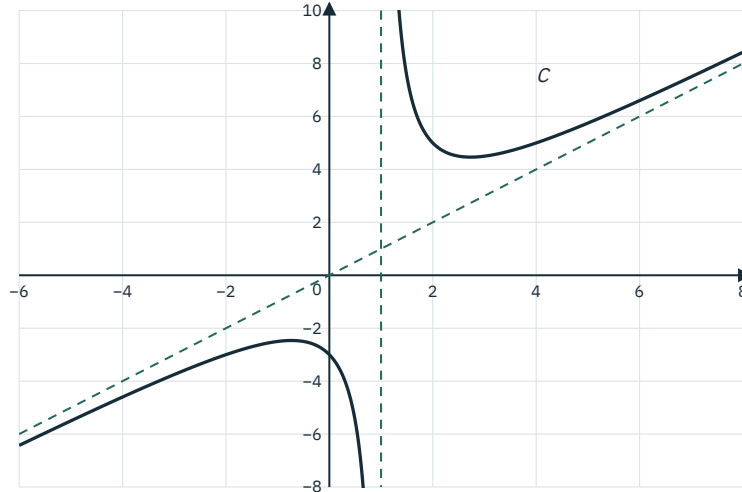
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x - 1} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$$

إذن $y = x$ (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$.

4

لدينا $f(x) - x = \frac{3}{x-1}$ إذن:

- إذا كان $x > 1$: $f(x) - x > 0$ والمنحنى (C_f) فوق (Δ) .
- إذا كان $x < 1$: $f(x) - x < 0$ والمنحنى (C_f) تحت (Δ) .



حل التمرين 6 — دوال تحوي جذرًا تربيعيًا

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x-2} = +\infty \text{ إذن } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2) = +\infty$$

2

عندما $x \rightarrow 1^+$: $x-1 \rightarrow 0^+$ ف $\sqrt{x-1} \rightarrow 0^+$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$. وعندما $x \rightarrow +\infty$: $\sqrt{x-1} \rightarrow +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. المستقيمان المقاربان: $x = 1$ (شاقولي) و $y = 0$ (أفقي بجوار $+\infty$).

3

عندما $x \rightarrow 0^+$: $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$ ف $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$. وعندما $x \rightarrow +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$. المستقيمان المقاربان: $x = 0$ (محور الترتيب) و $y = 2$ (بجوار $+\infty$).

حل التمرين 7 — تعيين دالة من مستقيمتها المقاربة

1

المستقيم $x = -2$ مقارب شاقولي، فالمقام ينعدم عند -2 أي $-2 + c = 0$ ومنه $c = 2$ (والبسط لا ينعدم عند -2 كما نتحقق لاحقًا).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{1 + \frac{c}{x}} = a$$

والمستقيم $y = 3$ مقارب أفقي إذن $a = 3$.

$$f(0) = -1 \text{ أي } \frac{b}{2} = -1 \text{ ومنه } b = -2. \text{ إذن } f(x) = \frac{3x-2}{x+2}, \text{ وعند } -2 \text{ البسط}$$

$$3(-2) - 2 = -8 \neq 0 \text{ فالمقارب الشاقولي مؤكد.}$$

2

البسط يؤول إلى $-8 < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-8}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

$$f(x) - 3 = \frac{3x - 2 - 3(x + 2)}{x + 2}$$

$$= \frac{-8}{x + 2}$$

إذا كان $x > -2$: $f(x) - 3 < 0$ فالمنحنى تحت المستقيم $y = 3$. إذا كان $x < -2$: المنحنى فوقه.

3

$$f(x) = 0 \iff 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3} \quad (x \neq -2 \text{ مع } f(x) = 0) \iff x = \frac{2}{3} \text{ نقطة التقاطع هي } \left(\frac{2}{3}; 0\right).$$

حل التمرين 8 — دالة ناطقة بمستقيمين مقاربين شاقوليين

1

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

2

عند 2: البسط يؤول إلى $2 \times 4 - 6 = 2 > 0$ والمقام $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ حيث $x + 2 > 0$ بجوار 2، فإشارة المقام إشارة $x - 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

عند -2: البسط يؤول إلى $8 + 6 = 14 > 0$ والمقام: $x - 2 < 0$ بجوار -2 وإشارة $x + 2$ موجبة من اليمين وسالبة من اليسار، فالمقام يؤول إلى 0^- من اليمين و 0^+ من اليسار:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{14}{0^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \frac{14}{0^+} = +\infty$$

3

المستقيمات المقاربة: $x = 2$ و $x = -2$ (شاقوليان) و $y = 2$ (أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$).

4

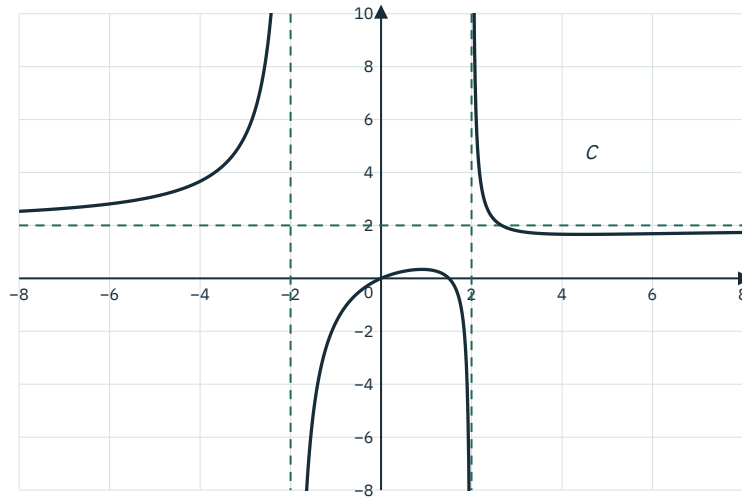
$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 3x - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{2x^2 - 3x - 2x^2 + 8}{x^2 - 4} = \frac{8 - 3x}{x^2 - 4}$$

البسط ينعدم عند $\frac{8}{3}$ والمقام عند -2 و 2 :

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$8 - 3x$	+	+	+	0	-
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+
$f(x) - 2$	+		-		+

النتيجة: (C_f) فوق المستقيم $y = 2$ على $]-2; +\infty[$ وعلى $]-\infty; \frac{8}{3}[$ ، وتحت على $[\frac{8}{3}; 2]$ ، ويقطعه في النقطة $(\frac{8}{3}; 2)$.



حل التمرين 9 — تعريف النهاية

1

$$x^2 - 3 > 1000 \iff x^2 > 1003$$

$$\iff x > \sqrt{1003} \quad (\text{لأن } x > 0)$$

و $\sqrt{1003} \approx 31.67$ فيكفي أخذ $\alpha = 32$: إذا كان $x > 32$ فإن $x^2 - 3 > 1021 > 1000$. وبنفس الطريقة، من أجل أي عدد $A > 0$ يكفي أخذ $\alpha = \sqrt{A + 3}$ ، وهذا هو تعريف $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$.

2

$$\begin{aligned}f(x) - 2 &= \frac{2x + 3 - 2(x + 1)}{x + 1} \\&= \frac{1}{x + 1} \\|f(x) - 2| < 0.01 &\iff \frac{1}{x + 1} < 0.01 \quad (x + 1 > 0) \\&\iff x + 1 > 100 \\&\iff x > 99\end{aligned}$$

إذن $\alpha = 99$.

3

من أجل كل $\varepsilon > 0$: $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ $\iff x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ $\iff \frac{1}{x + 1} < \varepsilon$. فمهما صغر ε يوجد $\alpha = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ يحقق $|f(x) - 2| < \varepsilon \Rightarrow x > \alpha$.
إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.