

سلسلة تمارين 2

حساب المشتقات واتجاه التغير واشتقاق دالة مركبة

قواعد مستعملة: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(uv)' = u'v + uv'$, $(u + v)' = u' + v'$, $[g(ax + b)]' = a g'(ax + b)$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
 $(\cos x)' = -\sin x$ و $(\sin x)' = \cos x$

☆☆★

التمرين 1 — اشتقاق دوال أساسية

احسب مشتقة كل دالة على مجال تعريفها:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7 \quad (1)$$

$$g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3) \quad (2)$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad (3)$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 2 — دوال تحوي الجذر التربيعي

احسب مشتقة كل دالة على $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$g(x) = x\sqrt{x} \quad (2)$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1} \quad (3)$$

$$k(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x}} \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 3 — اشتقاق دالة مركبة

احسب مشتقة كل دالة على مجال مناسب:

$$f(x) = (3x - 2)^5 \quad (1)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

$$h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad (3)$$

$$k(x) = \cos(2x + 1) \quad (4)$$

$$m(x) = \sin^2 x \quad (5)$$

☆☆☆

التمرين 4 — دراسة تغيرات دالتين

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ على $\mathbb{R}$: احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها واستنتج جدول تغيرات f (مع النهايات).

(2) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$: ادرس تغيرات g مع النهايات واستنتج أنها تقبل قيمة حدية صغرى.

☆☆☆

التمرين 5 — دالة ناطقة بقيمة ممنوعة

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ على } \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(1) احسب $f'(x)$ وبيّن أن $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

(2) احسب نهايات f عند أطراف مجموعة التعريف.

(3) شكّل جدول تغيرات f .

☆☆☆

التمرين 6 — مسألة قيمة حدية

نريد تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل بسياج طوله 40 م على ثلاثة أضلاع فقط، والضلع الرابع هو جدار موجود. نرمز بـ x إلى طول كل ضلع عمودي على الجدار.

(1) بيّن أن مساحة القطعة هي $A(x) = x(40 - 2x)$ مع $x \in]0; 20[$.

(2) ادرس تغيرات A على $]0; 20[$.

(3) استنتج أبعاد القطعة ذات أكبر مساحة وقيمة هذه المساحة.

☆☆☆

التمرين 7 — مماسات منحنى

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ ومنحنىها } (C_f).$$

(1) اكتب معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

(2) عيّن النقط التي يكون فيها المماس أفقيًا وأعط معادلة كل مماس.

(3) هل يوجد مماس لـ (C_f) يوازي المستقيم $y = -3x$ ؟ إن وُجد فأعط معادلته.

☆☆☆

التمرين 8 — الدالة $\sqrt{x^2+4}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} \text{ ومنحنىها } (C_f).$$

(1) بيّن أن f معرفة على $\mathbb{R}$ وأنها زوجية.

(2) احسب $f'(x)$ وشكّل جدول تغيرات f .

(3) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$. استنتج المستقيمين المقاربين المائلين للمنحنى.

★★★

التمرين 9 — إثبات متراجحات بدراسة التغيرات

(1) بيّن أنه من أجل كل $x \geq -2$: $x^3 - 3x + 4 > 0$ (ادرس $p(x) = x^3 - 3x + 4$ على $[-2; +\infty[$).

(2) بيّن أنه من أجل كل $x \geq 0$: $x \geq \sin x$ (ادرس $g(x) = x - \sin x$).

(3) استنتج أنه من أجل كل $x \geq 0$: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (ادرس $h(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$).

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — اشتقاق دوال أساسية

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 \quad (1)$$

2

$$v' = 2x \text{ و } u' = 2 \text{ ف } v = x^2 - 3 \text{ و } u = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) \\ &= 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x \\ &= 6x^2 + 2x - 6 \end{aligned}$$

3

$$h \text{ معرفة على } \mathbb{R} \setminus \{1\}, u = x^2 + 1 \text{ و } v = x - 1$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

4

$$v = x^2 + x + 1 \text{ (لا ينعدم لأن } \Delta = -3 < 0 \text{ و } v' = 2x + 1)$$

$$k'(x) = \frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

حل التمرين 2 — دوال تحوي الجذر التربيعي

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \quad (1)$$

2

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \\ &= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \end{aligned}$$

4

نكتب $k(x) = 2x^{1/2} - x^{-1/2}$ أو نستعمل خارج القسمة: $u = 2x - 1, v = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{2\sqrt{x} - (2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{4x - (2x-1)}{2\sqrt{x}x} = \frac{2x+1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

حل التمرين 3 — اشتقاق دالة مركبة

$$f'(x) = 5 \times 3 \times (3x-2)^4 = 15(3x-2)^4 : u' = 3, u = 3x-2 \quad \mathbf{1)}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} : u = x^2+1 > 0 \quad \mathbf{2)}$$

$$v' = 2 \times 2x \times (x^2+1) = 4x(x^2+1) \text{ و } v = (x^2+1)^2 \quad \mathbf{3)}$$

$$h'(x) = \frac{-v'}{v^2} = \frac{-4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3}$$

$$k'(x) = 2 \times (-\sin(2x+1)) = -2\sin(2x+1) \quad \mathbf{4)}$$

$$m'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x : u' = \cos x \text{ و } u = \sin x \text{ مع } m = u^2 \quad \mathbf{5)}$$

حل التمرين 4 — دراسة تغيرات الدالتين

1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ النهايات: $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ و $f(0) = 2$. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ تنعدم عند 0 و 2.

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$.

$-\infty$	0	2	$+\infty$	x
+	0	-	0	$f'(x)$
$-\infty$	2	-2	$+\infty$	$f(x)$

2

$g(1) = 2$. $x - 1$ إشارة أي $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ إشارة $]0; +\infty[$ وعلى $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

0	1	$+\infty$	x
-	0	+	$g'(x)$
$+\infty$	2	$+\infty$	$g(x)$

إذن $g(x) \geq 2$ من أجل كل $x > 0$: قيمة حدية صغرى 2 عند $x = 1$.

حل التمرين 5 — دالة ناطقة بقيمة ممنوعة

1

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \times 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

2

عند $\pm\infty$: $f(x) = \frac{x^2}{x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$. عند 1: البسط يؤول إلى $1 > 0$ ف
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$

3

المقام $(x-1)^2 > 0$ فإشارة f' إشارة $x(x-2)$: موجبة على $]0; 2[$ وسالبة على $]2; +\infty[$ وعلى $]-\infty; 0[$ وعلى $]1; 2[$.
 $f(2) = 4$ و $f(0) = 0$

$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	x
+	0	-	-	0	$f'(x)$
$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	4	$f(x)$

حل التمرين 6 — مسألة قيمة حدية

1

الضلعان العموديان طولهما x لكل منهما فالضلع الموازي للجدار هو $40 - 2x$. المساحة $A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$.
يجب $40 - 2x > 0$ أي $x < 20$ ، ف $x \in]0; 20[$.

2

$A'(x) = 40 - 4x = 4(10 - x)$. موجبة على $]0; 10[$ وسالبة على $]10; 20[$. $A(10) = 10 \times 20 = 200$.

0	10	20	x
+	0	-	$A'(x)$
0	200	0	$A(x)$

3

أكبر مساحة هي 200 m^2 وتُنال من أجل $x = 10$ م: الأضلاع العمودية 10 م والضلع الموازي للجدار $40 - 20 = 20$ م.

حل التمرين 7 — مماسات منحني

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

1

$$f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 \text{ و } f'(2) = 12 - 3 = 9. \text{ المماس: } y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15.$$

2

$$f'(x) = 0 \iff 3(x^2 - 1) = 0 \iff x = 1 \text{ أو } x = -1. \text{ عند } x = 1, f(1) = 1 - 3 + 1 = -1. \text{ عند } x = -1, f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3. \text{ المماسان الأفقيان: } y = -1 \text{ عند } (1; -1) \text{ و } y = 3 \text{ عند } (-1; 3).$$

3

المماس يوازي $y = -3x$ إذا كان $f'(x) = -3$: $x = 0 \iff x^2 = 0 \iff 3x^2 - 3 = -3$ و $f(0) = 1$ و $f'(0) = -3$
فالمماس: $y = -3x + 1$ (يوازي المستقيم ولا ينطبق عليه).

حل التمرين 8 — الدالة $\sqrt{x^2+4}$

1

$x^2 + 4 \geq 4 > 0$ فالدالة معرفة على $\mathbb{R}$. وبما أن $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 4} = \sqrt{x^2 + 4} = f(x)$ فهي زوجية.

2

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \text{ وإشارتها إشارة } x. \text{ و } f(0) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

$-\infty$	0	$+\infty$	x
—	0	+	$f'(x)$
$+\infty$	2	$+\infty$	$f(x)$

3

$$f(x) - x = \frac{(x^2 + 4) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}$$

المقام يؤول إلى $+\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$ فالنهاية 0: المستقيم $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$. وبسبب الزوجية المستقيم $y = -x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

حل التمرين 9 — إثبات متراجحات بدراسة التغيرات

1

$$p(-1) = -1 + 3 + 4 = 6 \text{ و } p(-2) = -8 + 6 + 4 = 2. \text{ و } p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p = +\infty \text{ و } p(1) = 1 - 3 + 4 = 2$$

-2	-1	1	$+\infty$	x
$+$	0	$-$	0	$p'(x)$
2	6	2	$+\infty$	$p(x)$

أصغر قيمة لـ p على $[-2; +\infty[$ هي $2 > 0$ ، إذن $p(x) > 0$ أي $x^3 - 3x + 4 > 0$.

2

$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ لأن $\cos x \leq 1$ ، ف g متزايدة على $[0; +\infty[$ و $g(0) = 0 - \sin 0 = 0$. إذن من أجل $x \geq 0$:
 $g(x) \geq g(0) = 0$ أي $x \geq \sin x$.

3

$h'(x) = -\sin x + x = g(x) \geq 0$ (السؤال 2)، ف h متزايدة و $h(0) = \cos 0 - 1 + 0 = 0$. إذن $h(x) \geq 0$ أي $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.