

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
دورة: جوان 2015

وزارة التربية الوطنية
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;5;4)$ ، $B(10;4;3)$ ، $C(4;3;5)$ و $D(0;4;5)$.

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية.

ب) بين أن النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي.

ج) استنتج أن النقطة D هي مرجح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

د) عيّن إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة D .

هـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ المحوري للقطعة $[AE]$.

(2) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MD} - 3\overrightarrow{MA}\|$

(3) أ) تحقق أن النقطة $F(1;8;10)$ تنتمي إلى المستوي $(\mathcal{P})$.

ب) المستقيم (FD) يقطع (Γ) في النقطتين G و H .

حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثم احسب مساحته.

(4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH) .

أ) بين أن الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي (AEH) .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t; 4-2t; 5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث $v(t) = 2|t|\sqrt{14} uv$.

(uv وحدة الحجم).

د) عيّن إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللتين يكون من أجليهما $v(t) = 2\sqrt{3} uv$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C, H و I لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = i, z_B = -2 + i, z_C = -3, z_H = -3 + 4i$ و $z_I = -1 - i$.

(1) أ) مثل النقط A, B, C, H و I في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

ب) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C .

(2) عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

(3) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$.

ب) استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

ج) بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

(4) بين أن النقط G, H و I في استقامة.

(5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z + 1 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

ج) أنشئ المجموعة (Γ) .

د) تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7.

(2) أ) بين أن 89 عدد أولي.

ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

ج) بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

(3) x و y عدنان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

عيّن x و y علماً أن:

(4) a, b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $PGCD(a; b^n) = 1$.

(يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).

ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f(x)=1-x^2 \ln x$.
($\mathcal{C}_f$) منحنى الدالة f الممثل في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(1) أ) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0;+\infty[$.

ب) تحقق أن $1,531 < \alpha < 1,532$

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(|x|)$.

($\mathcal{C}_g$) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس شفعية الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى ($\mathcal{C}_g$) على المجال $[-2;2]$.

(5) باستعمال الكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x^2 \ln x$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، والتي تتعدى من أجل القيمة 1 .

(6) t عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$. نضع $F(t)=\int_t^\alpha f(x)dx$.

أ) اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0;\alpha[$ ، $F(t)=\frac{-3t f(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.

ج) احسب $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$.

(7) m عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$.

$\mathcal{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m .

نفرض أن مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى ($\mathcal{C}_g$) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما على الترتيب: $x=-\alpha$ و $x=\alpha$ ، هي: $\mathcal{A}$ حيث: $\mathcal{A}=\frac{2}{9}(\alpha^3+6\alpha)ua$

(ua وحدة المساحات).

أ) عيّن القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$.

ب) علماً أن $3,140 < \pi < 3,142$ أعط حصرًا للعدد m .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة ، في كل حالة من الحالات الأربع الآتية ، مع التعليل.

(1) الحد العام للمتتالية العددية (u_n) المعروفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ هو:

$$(أ) \quad u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6 \quad ; \quad (ب) \quad u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad (ج) \quad u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{2}$$

(2) المستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقاط M من المستوى، ذات اللاحقة z ، حيث

$$|iz - 1 - i| = 3 \quad \text{هي: (أ) دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها } 1+i.$$

$$(ب) \text{ دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها } 1-i.$$

$$(ج) \text{ دائرة نصف قطرها 3 ولاحقة مركزها } -1+i.$$

(3) a ، b ، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a ، b ، c و d : يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

$$(أ) \text{ العدد } (a - b + c - d) \text{ يقبل القسمة على 11.}$$

$$(ب) \text{ العدد } (a + b + c + d) \text{ يقبل القسمة على 11.}$$

$$(ج) \text{ العدد } \overline{cd} \text{ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.}$$

(4) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. مجموعة النقاط M من الفضاء ذات الإحداثيات $(x; y; z)$ حيث

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t - k \\ y = 2 - t + \frac{3}{2}k \\ z = -3 + 4t - 6k \end{cases} \quad \text{هي: (أ) المجموعة } \{A\} \text{ حيث } A(1; 2; -3).$$

(ب) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1; 2; -3)$ و $\vec{u}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; -2\right)$ شعاع توجيه له.

(ج) المستوى الذي يشمل النقطة $A(1; 2; -3)$ و $\vec{n}(3; -2; -1)$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1 - \sqrt{3})z + 8 = 0 \quad (\text{لاحظ أن: } (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3})$$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوى ، لاحقتهما على الترتيب: $z_A = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ و $z_B = \overline{z_A}$.

$$(2) \text{ أ) بين أن: } \frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$$

ب) استنتج عمدة للعدد المركب z_A .

$$(3) \text{ ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين } \cos \frac{7\pi}{12} \text{ و } \sin \frac{7\pi}{12}.$$

(3) أ) حل ، في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $7x - 2y = 1$.

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلا للمعادلة $7x - 24y = 12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

ج) استنتج كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة ، حلولا للمعادلة $7x - 24y = 12$.

د) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(2; 0; 0)$ و $B(-1; -5; -1)$.

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(-1; 2; -1)$ شعاع توجيه له.

$$(\Delta_2) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}(2; 5; 3)$ شعاع توجيه له.

(1) بين أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها.

(2) بين أن المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوى.

(3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$ الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

ب) استنتج أن $4x + 3y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

ج) تحقق من أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى $(\mathcal{P})$.

(4) أ) بين أنه توجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث تكون

النقط A ، I و D في استقامة؛ يُطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D .

ب) بين أن النقطة I هي منتصف القطعة $[AD]$.

(5) النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(B; 1), (I; 2)\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على

المستوي $(\mathcal{P})$.

أ) بين أن النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها.

ب) استنتج إحداثيات النقطة G .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة بـ : $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.
 $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(4) أ) بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له .

(5) g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها .

(6) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$ ، $f(x) > x$.

ب) استنتج وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

(7) (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$.

ب) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) بيّن أنّ المتتالية (u_n) مقاربة ، ثمّ عيّن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(8) m عدد حقيقي . الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ :

$$h_m(x) = x e^{\frac{1}{x}} - m x$$

أ) احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m .

ب) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ، ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة

$$h'_m(x) = 0$$