

سلسلة تمارين 4

دراسة الدالة $\ln$ والدالة $\ln \circ u$ واللوغاريتم العشري

$\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. نهاياتها: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. وإذا كانت $u > 0$ قابلة للاشتقاق فإن $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ و $\ln \circ u$ لها نفس اتجاه تغير u .
نهايتان مرجعيتان: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. اللوغاريتم العشري: $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ ، $\log 10^n = n$ ، وإذا كان $n \leq \log x < n+1$ فإن $10^n \leq x < 10^{n+1}$.

☆☆☆

التمرين 1 — نهايات تتضمن $\ln$

احسب كل نهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(3-x) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad (6)$$

☆☆☆

التمرين 2 — اشتقاق دوال لوغاريتمية

احسب مشتقة كل دالة على المجال المعطى:

$$f(x) = \ln(3x-2) \text{ على } \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[\quad (1)$$

$$g(x) = \ln(x^2+x+1) \text{ على } \mathbb{R} \quad (2)$$

$$h(x) = \ln(e^x+1) \text{ على } \mathbb{R} \quad (3)$$

$$k(x) = x \ln x - x \text{ على }]0; +\infty[\quad (4)$$

$$p(x) = \ln(1-x^2) \text{ على }]-1; 1[\quad (5)$$

$$q(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ على }]0; +\infty[\quad (6)$$

☆☆☆

التمرين 3 — دراسة الدالة $\ln \frac{x+1}{x-1}$

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ و (C_f) منحناها.

- (1) يبين أن مجموعة تعريف f هي $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ وأن f فردية.
- (2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم استنتج نهايات f عند -1^- وعند $-\infty$. ما المستقيمات المقاربة لـ (C_f) ؟
- (3) يبين أن $f'(x) = \frac{-2}{x^2 - 1}$ ثم شكّل جدول تغيرات f على $]1; +\infty[$.
- (4) استنتج إشارة f على $]1; +\infty[$ ثم على $]-\infty; -1[$.

☆☆☆

التمرين 4 — دراسة الدالة $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$

- f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (اكتب $(f(x) = (\ln x + 3)(\ln x - 1))$).
 - (2) يبين أن $f'(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .
 - (3) حل المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج إشارة $f(x)$.
 - (4) ارسم (C_f) (استعمل النقاط ذات الفواصل e^{-3} و e^{-1} و 1 و e).

☆☆☆

التمرين 5 — دراسة الدالة $\ln x - \frac{2}{x}$ وتأطير حل

- f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$.
- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (2) يبين أن $f'(x) = \frac{x+2}{x^2}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .
 - (3) يبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α وأن $2.34 < \alpha < 2.35$.
 - (4) استنتج إشارة $f(x)$ على $]0; +\infty[$.

☆☆☆

التمرين 6 — المتراجحة $\ln x \leq x - 1$

- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$.
- (1) يبين أن $g'(x) = \frac{x-1}{x}$ ثم ادرس اتجاه تغير g واستنتج أن $\ln x \leq x - 1$ من أجل كل $x > 0$.
 - (2) بتطبيق ذلك على $\frac{1}{x}$ يبين أن $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$.
 - (3) استنتج تأطيرًا للعدد $\ln 2$ وللعدد $\ln 1.1$ ثم قارن مع قيمة الآلة الحاسبة.

☆☆☆

التمرين 7 — دراسة الدالة $\ln(x^2 - 4x + 5)$

- f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$ و (C_f) منحناها.
- (1) يبين أن $x^2 - 4x + 5 > 0$ من أجل كل x ثم استنتج مجموعة تعريف f .
 - (2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) احسب $f'(x)$ وشكل جدول التغيرات.

(4) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) (أي $f(4 - x) = f(x)$).

(5) اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0.

☆☆☆

التمرين 8 — دالة بمقارب أفقي ومقارب شاقولي

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x + 3)$.

(1) عيّن مجموعة تعريف f .

(2) بين أن $f(x) = \ln \frac{2x + 1}{x + 3}$ ثم احسب نهايتها عند $-\frac{1}{2}$ (من اليمين) وعند $+\infty$. استنتج مستقيمين مقاربين.

(3) بين أن $f'(x) = \frac{5}{(2x + 1)(x + 3)}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) حل المعادلة $f(x) = 0$ واستنتج إشارة $f(x)$. بين أن $f(x) < \ln 2$ من أجل كل x في D_f .

☆☆☆

التمرين 9 — اللوغاريتم العشري

استعمل $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ (مع $\log 2 \approx 0.30103$ و $\log 7 \approx 0.84510$ و $\log 3.2 \approx 0.50515$):

(1) احسب $\log 1000$ و $\log 0.001$ و $\log 2 + \log 5$ و $\log 250$ (بدلالة $\log 2$).

(2) حل في $]0; +\infty[$: $\log x = 2$ و $\log x \leq -4$ و $\log(x + 1) > 3$.

(3) عدد أرقام الكتابة العشرية للعدد الطبيعي N هو $[\log N] + 1$. جد عدد أرقام 7^{50} وعدد أرقام 2^{100} .

(4) يعرف pH محلول بالعلاقة $pH = -\log [H^+]$. جد pH محلول فيه $[H^+] = 3.2 \times 10^{-5}$ مول/لتر.

☆☆☆

التمرين 10 — دراسة الدالة $\ln(e^x + 1) - x$ ومقاربيها

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$ و (C_f) منحناها.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) بين أن المستقيم $y = -x$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ وأن المستقيم $y = 0$ مقارب بجوار $+\infty$. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل منهما.

(4) احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(5) ارسم (Δ) و (C_f) .

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — نهايات تتضمن $\ln$

$$1) \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \text{ و } x - 2 \rightarrow 0^+ \text{ فالنهاية } -\infty.$$

$$2) x^2 + 1 \rightarrow +\infty \text{ فالنهاية } +\infty.$$

$$3) 3 - x \rightarrow 0^+ \text{ فالنهاية } -\infty.$$

$$4) \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1 \text{ فالنهاية } \ln 1 = 0.$$

$$5) \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \text{ وبوضع } h = 3x \rightarrow 0 : 3 \times 1 = 3.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} \rightarrow 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

حل التمرين 2 — اشتقاق دوال لوغاريتمية

$$\text{نستعمل } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$1) f'(x) = \frac{3}{3x-2}$$

$$2) g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \text{ (المقام موجب لأن } \Delta = -3 < 0 \text{)}$$

$$3) h'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$4) k'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

$$5) p'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$6) q'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

حل التمرين 3 — دراسة الدالة $\ln \frac{x+1}{x-1}$

1

يلزم $\frac{x+1}{x-1} > 0$ أي $x < -1$ أو $x > 1$ (جدول الإشارة). D متناظرة بالنسبة إلى 0 و:

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} = -\ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

2

عند $1^+ : \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{2}{0^+} = +\infty$ و $f \rightarrow +\infty$ عند $+\infty : \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \rightarrow 1$ و $f \rightarrow \ln 1 = 0$ بالفردية:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$. المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = -1$ و $y = 0$ (محور الفواصل).

3

$$u' = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \text{ و } u = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

على $]1; +\infty[$: $x^2 - 1 > 0$ و $f' < 0$.

1	$+\infty$	x
	-	$f'(x)$
$+\infty$		$f(x)$
	0	

4

على $]1; +\infty[$: f متناقصة نحو 0 إذن $f(x) > 0$ (أو مباشرة: $\frac{x+1}{x-1} > 1$). وبالفردية $f(x) < 0$ على $]-\infty; -1[$.

حل التمرين 4 — دراسة الدالة $(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$

1

عند 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ و $\ln x + 3 \rightarrow -\infty$ و $\ln x - 1 \rightarrow -\infty$ والجداء $\rightarrow +\infty$. عند $+\infty$: $\ln x \rightarrow +\infty$ والعاملان $f \rightarrow +\infty$ و $f \rightarrow +\infty$.

2

$$f'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$$

$$f(e^{-1}) = 1 - 2 - 3 = -4. \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$$

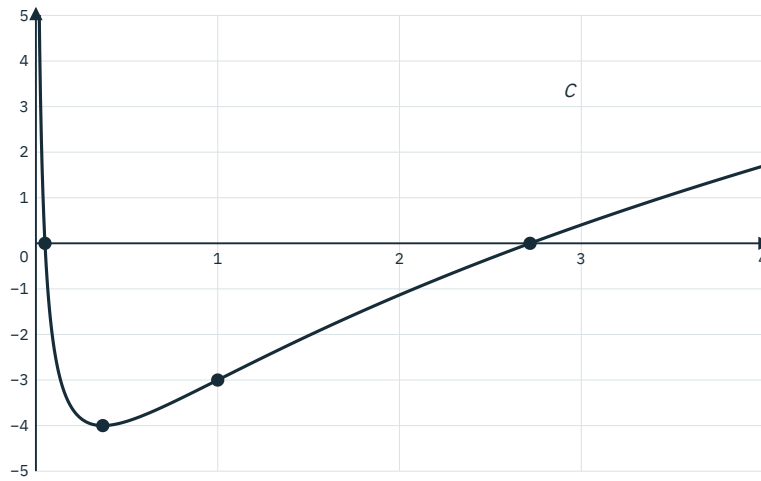
0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	x
	-	0	$f'(x)$
$+\infty$		$+\infty$	$f(x)$
	-4		

3

$f(x) = 0 \iff \ln x = -3$ أو $x = e^{-3}$ أو $\ln x = 1$ أو $x = e$. من الجدول: $f(x) > 0$ على $]0; e^{-3}[\cup]e; +\infty[$ و $f(x) < 0$ على $]e^{-3}; e[$.

4

قيم مساعدة: $f(e^{-3}) = 0$ و $f(e^{-1}) = -4$ و $f(1) = -3$ و $f(e) = 0$ ($e \approx 2.72$ و $e^{-1} \approx 0.37$ و $e^{-3} \approx 0.05$).



حل التمرين 5 — دراسة الدالة $\ln x - \frac{2}{x}$ وتأطير حل

1

عند 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ و $-\frac{2}{x} \rightarrow -\infty$ ف $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. عند $+\infty$: $\ln x \rightarrow +\infty$ و $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ ف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0 \text{ على }]0; +\infty[.$$

0	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$

3

f مستمرة ومتزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$ وصورتها $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α . جدول قيم:

2	2.3	2.34	2.35	3	x
-0.3069	-0.0367	-0.0045	0.0034	0.4319	$f(x)$

$$f(2.34) < 0 < f(2.35) \text{ إذن } 2.34 < \alpha < 2.35.$$

4

$f(x) < 0$ على $]0; \alpha[$ و $f(\alpha) = 0$ و $f(x) > 0$ على $]\alpha; +\infty[$.

حل التمرين 6 — المتراجحة $\ln x \leq x - 1$

1

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ وهي سالبة على $]0; 1[$ وموجبة على $]1; +\infty[$. ف g متناقصة على $]0; 1[$ ومتزايدة على $]1; +\infty[$.
وقيمتها الصغرى $g(1) = 0$. إذن $g(x) \geq 0$ أي $\ln x \leq x - 1$ (المساواة فقط عند $x = 1$).
هذه المتراجحة تعني هندسيًا أن منحنى الدالة $\ln$ يقع تحت مماسه $y = x - 1$ عند النقطة $(1; 0)$.

2

بتعويض $x > 0 : \frac{1}{x} > 0$ أي $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$ ومنه $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$ إذن: $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.

3

• $x = 2 : \frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$ (القيمة الحقيقية ≈ 0.693).
• $x = 1.1 : 1 - \frac{1}{1.1} \leq \ln 1.1 \leq 0.1$ والقيمة الحقيقية ≈ 0.0953 .

حل التمرين 7 — دراسة الدالة $\ln(x^2 - 4x + 5)$

1

$$D_f = \mathbb{R} \text{ ف } x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

2

$x^2 - 4x + 5 \rightarrow +\infty$ عند $\pm\infty$ ف $f \rightarrow +\infty$ في الحالتين.

3

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} \text{ وإشارتها إشارة } 2x - 4. f(2) = \ln 1 = 0.$$

$-\infty$	2	$+\infty$	x
—	0	+	$f'(x)$
$+\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$

4

$x = 2$ المستقيم: $f(4 - x) = f(x)$ ف $(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 5 = 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 5 = x^2 - 4x + 5$
محور تناظر.

5

$$f(0) = \ln 5 \text{ و } f'(0) = \frac{-4}{5} \text{ المماس: } y = -\frac{4}{5}x + \ln 5.$$

حل التمرين 8 — دالة بمقارب أفقي ومقارب شاقولي

1

$$D_f = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[: x > -\frac{1}{2} \text{ أي } x+3 > 0 \text{ و } 2x+1 > 0 \text{ يلزم}$$

2

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \text{ مع } a, b > 0 \text{ عند } -\frac{1}{2}^+ : 2x+1 \rightarrow 0^+ \text{ و } x+3 \rightarrow \frac{5}{2} \text{ ف } \frac{2x+1}{x+3} \rightarrow 0^+ \text{ والنهية } -\infty \text{ عند } +\infty$$

$$\frac{2x+1}{x+3} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \rightarrow 2 \text{ فالنهاية } \ln 2 \text{ المقاربان: } x = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \ln 2$$

3

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3) - (2x+1)}{(2x+1)(x+3)} = \frac{5}{(2x+1)(x+3)} > 0$$

$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	x
	+	$f'(x)$
$-\infty$	$\ln 2$	$f(x)$

4

$$f(x) = 0 \iff \frac{2x+1}{x+3} = 1 \iff 2x+1 = x+3 \iff x = 2$$

$$f(x) > 0 \text{ على }]2; +\infty[\text{ ولأن } f \text{ متزايدة تمامًا ونهايتها عند } +\infty \text{ هي } \ln 2 \text{ فإن } \ln 2 < f(x) \text{ على } D_f$$

حل التمرين 9 — اللوغاريتم العشري

1

$$\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3 \text{ و } \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$$

$$\log 250 = \log \frac{1000}{4} = 3 - 2 \log 2 \approx 2.398 \text{ (قيمة الآلة 2.3979)}$$

2

$$\log x = 2 \iff x = 10^2 = 100$$

$$\log x \leq -4 \iff x \leq 10^{-4} \text{ (لأن } \log \text{ متزايدة) مع } x > 0 : S =]0; 10^{-4}]$$

$$\log(x+1) > 3 \iff x+1 > 10^3 \iff x > 999 : S =]999; +\infty[$$

3

$\log 7^{50} = 50 \log 7 \approx 42.25$ فجزؤه الصحيح 42 وعدد الأرقام 43. و $\log 2^{100} = 100 \log 2 \approx 30.10$ فجزؤه الصحيح 30 وعدد الأرقام 31.

4

$pH = -\log(3.2 \times 10^{-5}) = -(\log 3.2 - 5) = 5 - \log 3.2 \approx 4.49$ محلول حمضي.

حل التمرين 10 — دراسة الدالة $\ln(e^x + 1) - x$ ومقاربتها

1

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x} = \ln(1 + e^{-x}) \text{ ف } x = \ln(e^x)$$

2

- عند $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ ف $1 + e^{-x} \rightarrow 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$.
- عند $-\infty$: $e^{-x} \rightarrow +\infty$ ف $1 + e^{-x} \rightarrow +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3

- بجوار $-\infty$: $f(x) - (-x) = \ln(e^x + 1) \rightarrow \ln 1 = 0$ لأن $e^x \rightarrow 0$. فالمستقيم $y = -x$ (Δ) مقارب مائل، و $\ln(e^x + 1) > 0$ إذن $e^x + 1 > 1$ و $\ln(e^x + 1) > 0$ فوق (C_f) فوق (Δ).
- بجوار $+\infty$: $f(x) \rightarrow 0$ فالمستقيم $y = 0$ مقارب أفقي، و $1 + e^{-x} > 1$ إذن $f(x) > 0$ و (C_f) فوق محور الفواصل.

4

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{-1}{e^x + 1} < 0 \text{ ف } f \text{ متناقصة تمامًا على } \mathbb{R} \text{ و } f(0) = \ln 2 \approx 0.693.$$

$-\infty$	$+\infty$	x
—		$f'(x)$
		$f(x)$

