



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

(1) احسب الحدّين: u_1 و v_1 .

(2) أ) اكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$.

ب) باستعمال البرهان بالتراجع برهن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = u_n - v_n$.

برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدّها الأوّل w_0 ثم عبّر عن w_n بدلالة n .

(4) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; 1; -1)$ ، $B(2; -1; -1)$ و $C(4; -4; -2)$

والمستوي (P) ذا المعادلة الديكارتية: $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

(1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا.

(2) بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين.

(3) تحقق أنّ الجملة: $(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = -2 + \alpha - 3\beta \\ y = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ z = \beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (ABC) .

(4) جد تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\| = 2cm$.



لتكن النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 2$ ، $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_B$ ($\bar{z}_B$ هو مرافق z_B)
 (1) أ) اكتب العدد z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب z_C .

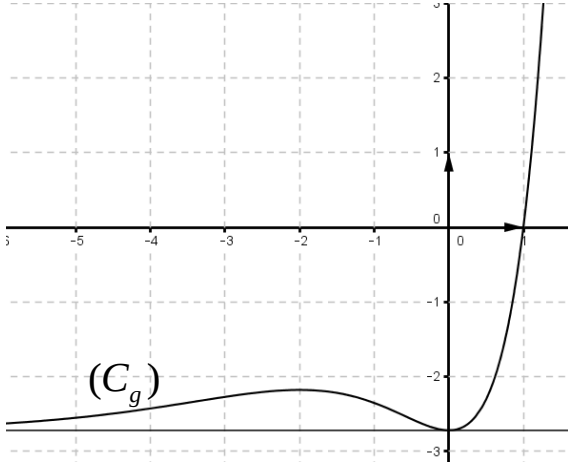
ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .

(2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على

الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .

ب) احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 e^x - e$
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل).

- احسب $g(1)$.

- بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن المنحنى (γ) الذي معادلته : $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

(3) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

(4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty]$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة: $x \mapsto e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

(6) ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.

احسب العدد الحقيقي l حيث $l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $C(2;3;-1)$ ، $B(1;2;1)$ ، $A(-8;0;-2)$ و $E(1;1;4)$ والمستوي (P) ذا المعادلة: $2x + y - 3 = 0$.

(1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعاً ناظماً للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية له.

(2) بين أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) ، ثم تحقق أن النقط E تنتمي إلى (Δ) و $\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه له.

(3) لتكن النقط G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-2), (C;3)\}$ ، نرمز بـ (Γ) إلى مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $(\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$

عين إحداثيات النقط G ، ثم حدّد طبيعة المجموعة (Γ) واكتب معادلة ديكارتية لها.

(4) عين إحداثيات نقط تقاطع (P) ، (ABC) و (Γ) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$

ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II) نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

(1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثّل على حامل محور الفواصل

الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (دون حساب الحدود)

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

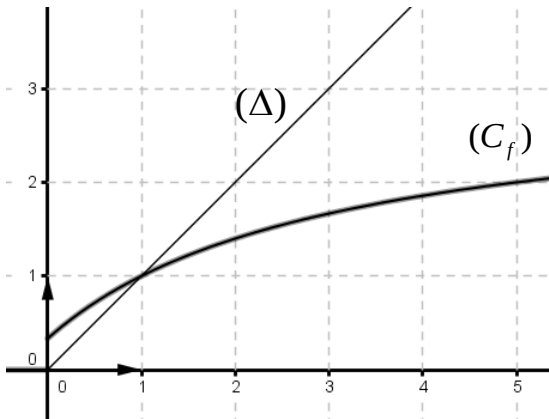
(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

ب) عبّر بدلالة n عن u_n و v_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016}$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \frac{1}{u_{n+2} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2016} + 1}$





التمرين الثالث: (05 نقاط)

- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها $z_A = -3 - 2i$ ، $z_B = 1 + i$ و $z_C = 4 - 3i$.
- (1) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C .
- (2) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$
- عيّن كلاً من z_I و z_G لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أنّ النقط B ، G و I في استقامية.
- (4) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I ، حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.
- (5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MC}\| = 5\sqrt{2}$.
- (أ) تحقق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ) .
- (ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها.

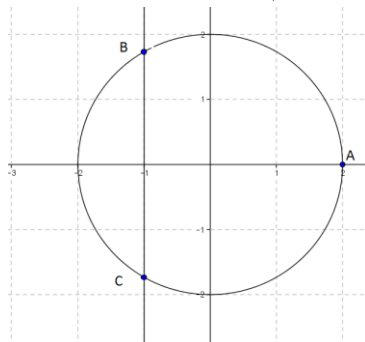
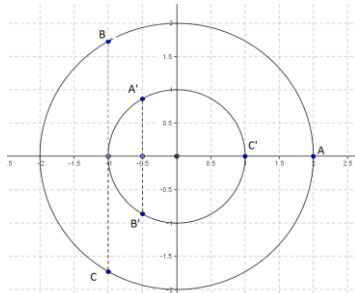
التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + 2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة ببيان.
- (2) (أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ ، $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$.
- (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) حل في المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.
- (4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها، ثم انشئ (C_f) .
- (II) لتكن الدالة g المعرفة على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كما يلي: $g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$.
- (1) (أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
- (أ) بيّن أنّ للمعادلة $g(x) = 0$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1,2 < \alpha < 1,3$
- (ب) استنتج إشارة $g(x)$.

- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماماً من 1 : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
- أثبت أنّ: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ، $0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

انتهى الموضوع الثاني

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
الموضوع الأول		
التمرين الأول : (04 نقاط)		
00.50	0.25×2	$u_1 = \frac{7}{4}$ و $v_1 = \frac{11}{2}$.
02.00	00.50	(2) أ) $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)$.
	00.75	ب) لدينا $u_1 - u_0 > 0$. نفرض $u_{n+1} - u_n > 0$ ، و بالتالي: $\frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) > 0$ أي: $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n > 0$ و (u_n) متزايدة تماما .
	00.75	بنفس الطريقة نثبت أن (v_n) متناقصة تماما .
00.75	0.25	(3) من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}w_n$. إذن: المتتالية (w_n) هندسية .
	0.25×2	أساسها $\frac{3}{4}$ و حدها الأول w_0 حيث: $w_0 = -5$.
00.75	0.25	(4) لدينا المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما
	0.25×2	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5) \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ و (u_n) و (v_n) متجاورتين .
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
00.75	0.25×3	(1) الشعاعان $\overrightarrow{AB}(1, -2, 0)$ و $\overrightarrow{AC}(3, -5, -1)$ غير مرتبطين خطيا .
00.75	0.75	(2) تبين أنّ المستويين (P) و (ABC) غير متوازيين .
		أي إثبات أن الشعاع $\vec{n}(1, -2, 2)$ (ناظم لـ (P)) غير عمودي على $\overrightarrow{AB}$.
01.50	0.5×3	(3) التحقق أن الجملة المعطاة تمثيل وسيطي لـ (ABC) .
		لدينا: $\begin{cases} 1 = -2 + \alpha - 3\beta \\ 1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$ تكافئ $(\alpha, \beta) = (0, -1)$
		و $\begin{cases} 2 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -1 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -1 = \beta \end{cases}$ تكافئ $(\alpha, \beta) = (1, -1)$
		و $\begin{cases} 4 = -2 + \alpha - 3\beta \\ -4 = 6 - 2\alpha + 5\beta \\ -2 = \beta \end{cases}$ تكافئ $(\alpha, \beta) = (0, -2)$. إذن الجملة تمثيل وسيطي لـ (ABC)

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
01.00	00.50	(4) إيجاد تمثيل وسيطي لـ (Δ) : لدينا $0 = (-2 + \alpha - 3\beta) - 2(6 - 2\alpha + 5\beta) + 2(\beta) - 3$ يكافئ: $\alpha = \frac{11}{5}\beta + \frac{17}{5}$. $(\Delta) : \begin{cases} x = \frac{7}{5} - \frac{4}{5}\beta \\ y = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\beta, (\beta \in \mathbb{R}) \\ z = \beta \end{cases}$
	00.50	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
01.00	0.25×4	I. $\Delta = -12$ و مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي: $\{2; -1 + \sqrt{3}i; -1 - \sqrt{3}i\}$
02.00	0.25+0.5	II. أ) $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و بالتالي $z_C = \overline{z_B} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
	00.50	ب) لدينا: $ z_A = z_B = z_C = 2$ أي: $OA = OB = OC = 2$ إذن : النقط: A, B, C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها مبدأ المعلم O وطول نصف قطرها 2. في إنشاء النقط نستعين بالدائرة والمستقيم ذو المعادلة: $x = -1$. 
	00.25	
	00.50	
02.00	00.50	(2) أ) $S: z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot z$ $z_{C'} = 1, z_{B'} = e^{i\frac{4\pi}{3}}, z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ الإنشاء: يستعان بالدائرة التي مركزها النقطة O وطول نصف قطرها 1، أو استعمال خصائص وعناصر التشابه S .
	3×0.25	
	00.25	
	2×0.25	

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
التمرين الرابع : (07 نقاط)		
01.25	00.25	x $-\infty$ 1 $+\infty$ $g(x)$ $-$ 0 $+$ x $-\infty$ -1 $+\infty$ $g(-x)$ $+$ 0 $-$ $g(1) = 0$. تعيين إشارة $g(x)$: استنتاج إشارة $g(-x)$.
	00.5	
	00.5	
01.00	4×0.25	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$: حساب نهايات (1 .II) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
01.00	00.50	$y = e^{-x} - 2$ و (C_f) متقاربان بجوار $(-\infty)$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (e^{-x} - 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e}{x} = 0$ دراسة الوضع النسبي، للمنحنى، (C_f) و (γ) . x $-\infty$ 0 $+\infty$ (γ) تحت (C_f) (C_f) فوق (γ) (γ) و (C_f) النسبي لـ
	00.50	
00.50	00.50	$f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$: من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا (3 .
00.75	00.50	f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-1; 0[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; -1]$ جدول تغيرات الدالة f . x $-\infty$ -1 0 $+\infty$ $f'(x)$ $-$ 0 $+$ $+$ $f(x)$ $+\infty$ $2e - 2$ $+\infty$ $-\infty$ -2
	00.25	
01.50	00.5	$x \mapsto e^{-x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}-2$ (ومنحنى الدالة $x \mapsto e^{-x}$ هو نظير منحنى الدالة $x \mapsto e^x$ بالنسبة الى محور الترتيب) رسم المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم.
	01.00	
01.00	00.50	$A(n)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -e^{n+1}$ و $x = -e^n$. $A(n) = \int_{-e^{n+1}}^{-e^n} (f(x) - (e^{-x} - 2)) dx = [-e \ln x]_{-e^{n+1}}^{-e^n} = e (u.a)$$I = A(0) + A(1) + \dots + A(2016) = 2017e (u.a)$
	00.50	
	00.50	

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
الموضوع الثاني		
التمرين الأول : (04 نقاط)		
1.250	00.25	(1) أ) $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه A ، B و C تعين مستويا.
	00.5	ب) تعيين قيمة α حتى يكون $\vec{n}(1;\alpha;-1)$ شعاعاً ناظماً للمستوي (ABC) : نجد $\alpha = -3$
	00.50	- المعادلة الديكارتية لـ (ABC) هي: $x - 3y - z + 6 = 0$.
01.00	00.25	(2) المستويين (ABC) و (P) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) : $\vec{n}$ و $\vec{n}_p$ غير مرتبطين خطيا.
	00.25	التحقق أن النقطة $E(1;1;4)$ تنتمي إلى (Δ) : $E \in (ABC)$ و $E \in (P)$.
	2×0.25	$\vec{u}(1;-2;7)$ شعاع توجيه لـ (Δ) : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{n}_p = 0$
01.00	00.25	(3) إحداثيات النقطة $G(-2, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$.
	00.25	المجموعة (Γ) هي المستوي الذي يشمل G و $\overrightarrow{CB}$ ناظمي له.
	00.50	$2x + 2y - 4z - 15 = 0$ معادلة لـ (Γ) .
00.75	00.50	(4) نقط تقاطع (P) و (ABC) و (Γ)
	00.25	$[(ABC) \cap (P)] \cap (\Gamma) = (\Delta) \cap (\Gamma) = \{H\}$ و $H(\frac{1}{10}; \frac{14}{5}; -\frac{23}{10})$
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
00.50	00.50	(I) (u_n) ثابتة من أجل : $\alpha = 1$
01.50	4×0.25	(II) (1) أ) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (دون حساب الحدود) على حامل محور الفواصل.
	2×0.25	ب) التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما و مقاربة نحو 1.
01.25	2×0.25	(2) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول هو : $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2}{3}$.
	3×0.25	ب) $v_n = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n$ ، $u_n = \frac{1 + \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n} = \frac{3 + 2(\frac{1}{2})^n}{3 - 2(\frac{1}{2})^n}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$
00.75	00.50	(3) $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2016} = \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}\right]$
	00.25	استنتاج بدلالة n المجموع S'_n : $S'_n = -\frac{1}{2}(S_n - 2017)$