

سلسلة تمارين 2

الدوال $x \mapsto e^{kx}$ ودراسة الدالة $\exp \circ u$ واشتقاقها ونهاياتها

القاعدتان: الدالة $x \mapsto e^{kx}$ هي الدالة الوحيدة القابلة للاشتقاق التي تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$. وإذا كانت u قابلة للاشتقاق فإن $(e^u)' = u' e^u$.
 e^u و u لهما نفس اتجاه التغير على كل مجال. لحساب نهاية $e^{u(x)}$ نحسب نهاية $u(x) = L$ ثم نستعمل $\lim_{X \rightarrow L} e^X$.

☆☆★

التمرين 1 — تعيين الدالة $f' = kf$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. عيّن عبارة $f(x)$ في كل حالة:

(1) $f(0) = 1$ و $f' = 3f$

(2) $f(0) = 5$ و $f' = -2f$

(3) $f(0) = 4$ و $2f' = f$

(4) $f(0) = 1$ و $f' + f = 0$

إرشاد: إذا كانت $f(0) = C$ مع $C \neq 0$ فاعتبر $g = \frac{1}{C}f$.

☆☆★

التمرين 2 — اشتقاق دوال من الشكل e^u

احسب مشتقة كل دالة على المجال المعطى:

(1) $f(x) = e^{2x+3}$ على $\mathbb{R}$

(2) $g(x) = e^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$

(3) $h(x) = e^{1/x}$ على $\mathbb{R}^*$

(4) $k(x) = (x^2 - 1)e^{2x}$ على $\mathbb{R}$

(5) $p(x) = e^{\sqrt{x}}$ على $]0; +\infty[$

(6) $q(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

☆☆★

التمرين 3 — نهايات دوال مركبة

احسب النهايات التالية بتحديد نهاية الدالة الداخلية أولاً:

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2+2}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+\sqrt{x^2+1}}$ (استعمل المرافق)

☆☆☆

التمرين 4 — جداول تغيرات الدوال $\exp$ ou

ادرس اتجاه تغير كل دالة وأنجز جدول تغيراتها (بالنهايات عند أطراف مجموعة التعريف):

(1) $f(x) = e^{x^2-4x+3}$ على $\mathbb{R}$

(2) $g(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. ما المستقيمات المقاربة لمنحنائها؟

(3) $k(x) = e^{2x-x^2}$ على $\mathbb{R}$

☆☆☆

التمرين 5 — نهايات نسب التغير

استعمل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ لحساب النهايات التالية:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{2x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1}$

☆☆☆

التمرين 6 — دراسة دالة ومقارب مائل ومعادلة $f(x) = 0$

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 2 - 3e^{-x}$ و (C_f) منحنائها.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. بيّن أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) بجوار $+\infty$ وادرس الوضعية النسبية.

(2) بيّن أن $f'(x) = 1 + 3e^{-x}$ ثم شكّل جدول تغيرات f .

(3) عيّن المماس (T) لـ (C_f) الذي معامل توجيهه 4.

(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α وأن $0.27 < \alpha < 0.28$.

(5) ارسم (Δ) و (T) و (C_f) .

☆☆☆

التمرين 7 — نمذجة تفريغ مكثف

يتفرغ مكثف عبر مقاومة، ويُعطى التوتر بين طرفيه (بالفولط) بعد t ثانية بالدالة $U(t) = 12e^{-0.5t}$ حيث $t \geq 0$.

(1) احسب $U(0)$ ثم أكمل الجدول (قيم مدورة إلى 10^{-3}): $U(2)$ و $U(4)$ و $U(6)$.

(2) ادرس اتجاه تغير U وبيّن أن $U'(t) = -0.5 U(t)$. ماذا تمثل النهاية $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t)$ ؟

(3) يبين أن $\frac{U(t+2)}{U(t)} = e^{-1}$ من أجل كل t ثم فسّر النتيجة.

(4) يبين أن اللحظة t_0 التي يكون عندها التوتر 3 فولط وحيدة، وأن $2.7 < t_0 < 2.8$.

0	2	4	6	t
...	...	...	...	$U(t)$

☆☆☆

التمرين 8 — المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

نريد تعيين الدوال f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ التي تحقق $f'(x) = -3f(x) + 6$ من أجل كل x (المعادلة (E)).

(1) يبين أن f حل لـ (E) إذا وفقط إذا كانت $g = f - 2$ تحقق $g' = -3g$.

(2) نفرض $g' = -3g$ ونعتبر $h(x) = g(x)e^{3x}$. يبين أن $h' = 0$ ثم استنتج أن $g(x) = g(0)e^{-3x}$.

(3) استنتج حلول (E) ثم عيّن الحل الذي يحقق $f(0) = 5$.

(4) ادرس تغيرات الحل f المعين في السؤال السابق وبيّن أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً.

☆☆☆

التمرين 9 — عائلة منحنيات $f_a(x) = e^{ax} - ax$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً a نعتبر الدالة f_a المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_a(x) = e^{ax} - ax$ ومنحنائها (C_a) .

(1) احسب $f'_a(x)$ وادرس إشارتها. استنتج أن $f_a(x) \geq 1$ من أجل كل x .

(2) يبين أن كل المنحنيات (C_a) تقبل نفس المماس عند نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x)$.

(4) ليكن $0 < a < a'$. يبين أنه من أجل كل $x \neq 0$: $f_a(x) < f_{a'}(x)$ (ادرس الدالة $t \mapsto e^t - t$ على كل من $]-\infty; 0]$ و $[0; +\infty[$).

☆☆☆

تمرين للتعمق

التمرين 10 — الدالتان sh و ch

نعرف على $\mathbb{R}$ الدالتين: $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ و $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(1) يبين أن ch زوجية وأن sh فردية.

(2) يبين أن $\text{sh}' = \text{ch}$ و $\text{ch}' = \text{sh}$ ثم أن $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

(3) ادرس إشارة $\text{sh}(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات ch على $\mathbb{R}$ (النهايات عند $\pm\infty$ مطلوبة).

(4) احسب $\text{ch}(x) - \text{sh}(x)$ واستنتج وضعية (C_{ch}) بالنسبة إلى (C_{sh}) ونهاية الفرق عند $+\infty$.

الحلول المفصلة

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

حل التمرين 1 — تعيين الدالة $f' = kf$

الدالة الوحيدة التي تحقق $F' = kF$ و $F(0) = 1$ هي $F(x) = e^{kx}$.

$$f(x) = e^{3x} : k = 3 \quad \mathbf{1)}$$

$$g = \frac{1}{5}f \quad \text{تحقق } g' = -2g \text{ و } g(0) = 1 \text{ و } g(x) = e^{-2x} \text{ ومنه } f(x) = 5e^{-2x} \quad \mathbf{2)}$$

$$f' = \frac{1}{2}f \text{ و } k = \frac{1}{2} \text{ و } g = \frac{1}{4}f \text{ تحقق } g(0) = 1 \text{ و } g(x) = e^{x/2} \text{ ومنه } f(x) = 4e^{x/2} \quad \mathbf{3)}$$

$$f' = -f \text{ و } k = -1 : f(x) = e^{-x} \quad \mathbf{4)}$$

حل التمرين 2 — اشتقاق دوال من الشكل e^u

نستعمل $(e^u)' = u'e^u$.

$$f'(x) = 2e^{2x+3} \quad \mathbf{1)}$$

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} : u' = -2x \text{ و } u = -x^2 \quad \mathbf{2)}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} : u' = -\frac{1}{x^2} \text{ و } u = \frac{1}{x} \quad \mathbf{3)}$$

$$k'(x) = 2xe^{2x} + (x^2 - 1) \times 2e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + x - 1) \quad \mathbf{4)}$$

$$p'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} : u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ و } u = \sqrt{x} \quad \mathbf{5)}$$

$$q'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \mathbf{6)}$$

حل التمرين 3 — نهايات دوال مركبة

$$\mathbf{1)}$$
 $-x^2 + 2 \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0$ فكلتا النهايتين 0.

$$\mathbf{2)}$$
 عندما $x \rightarrow 0^+$: $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ و $e^{1/x} \rightarrow +\infty$. عندما $x \rightarrow 0^-$: $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ و $e^{1/x} \rightarrow 0$.

$$\mathbf{3)}$$
 عندما $x \rightarrow 1^+$: $1 - x \rightarrow 0^-$ و $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty$. عندما $x \rightarrow 1^-$: $1 - x \rightarrow 0^+$ و $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$. والنهاية $+\infty$.

$$\mathbf{4)}$$
 $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ و $e^0 = 1$ و $e^{1/x} \rightarrow e^0 = 1$.

$$\mathbf{5)}$$
 $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ و المقام $\rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$ فالعبارة $\rightarrow 0$ والنهاية $e^0 = 1$.

حل التمرين 4 — جداول تغيرات الدوال $\exp \circ u$

1

$u(x) = x^2 - 4x + 3$ و $u'(x) = 2x - 4$ ف $f'(x) = (2x - 4)e^{x^2 - 4x + 3}$ وإشارتها إشارة $2x - 4$.
 $f(2) = e^{4 - 8 + 3} = e^{-1}$. النهايتان: $u \rightarrow +\infty$ عند $\pm\infty$ ف $f \rightarrow +\infty$.

$-\infty$	2	$+\infty$	x
—	0	+	$f'(x)$
$+\infty$	e^{-1}	$+\infty$	$f(x)$

2

$u(x) = \frac{1}{x-1}$ و $u'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ ف $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} < 0$ على كل من $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$. النهايات:
عند $\pm\infty$: $u \rightarrow 0$ ف $g \rightarrow 1$ عند 1^+ و $u \rightarrow +\infty$ ف $g \rightarrow +\infty$ عند 1^- و $u \rightarrow -\infty$ ف $g \rightarrow 0$.

$-\infty$	1	$+\infty$	x
—		—	$g'(x)$
1	0	$+\infty$	$g(x)$

المستقيمان المقاربان: $y = 1$ (أفقي بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$) و $x = 1$ (شاقولي، من جهة اليمين فقط).

3

$u(x) = 2x - x^2$ و $u'(x) = 2 - 2x$ ف $k'(x) = (2 - 2x)e^{2x - x^2}$ وإشارتها إشارة $2 - 2x$. $k(1) = e^1 = e$. عند $\pm\infty$: $u \rightarrow -\infty$ ف $k \rightarrow 0$.

$-\infty$	1	$+\infty$	x
+	0	—	$k'(x)$
0	e	0	$k(x)$

حل التمرين 5 — نهايات نسب التغير

$$1) \frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} \text{ وبوضع } X = 3x \rightarrow 0 \text{ تؤول إلى } 3 \times 1 = 3.$$

$$2) \frac{1 - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{e^{-x} - 1}{-x} \text{ وبوضع } X = -x \rightarrow 0 \text{ تؤول إلى } \frac{1}{2}.$$

$$3) \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 2 - 1 = 1$$

$$4) \frac{e^{x^2} - 1}{x} = x \times \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \text{ و } X = x^2 \rightarrow 0 \text{ فالعامل الثاني } 1 \rightarrow \text{والأول } 0 \rightarrow \text{والنهاية } 0.$$

$$5) \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} - 1} = \frac{\frac{e^{3x} - 1}{x}}{\frac{e^{2x} - 1}{x}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

حل التمرين 6 — دراسة دالة ومقارب مائل ومعادلة $f(x) = 0$

1

عند $-\infty : -\infty \rightarrow -\infty$ و $x + 2 \rightarrow -\infty$ و $-3e^{-x} \rightarrow -\infty$ ف $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. عند $+\infty : 0 \rightarrow +\infty$ ف $e^{-x} \rightarrow 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 $f(x) - (x + 2) = -3e^{-x} \rightarrow 0$ إذن $y = x + 2$: (Δ) مقارب مائل. و $-3e^{-x} < 0$ ف $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ) .

2

و $f'(x) = 1 - 3 \times (-e^{-x}) = 1 + 3e^{-x} > 0$ ف f متزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$.

$-\infty$	$+\infty$	x
+		$f'(x)$
$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$

3

$x = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff 3e^{-x} = 3 \iff f'(x) = 4$. $f(0) = 2 - 3 = -1$. المماس: $y = 4x - 1$: (T) .

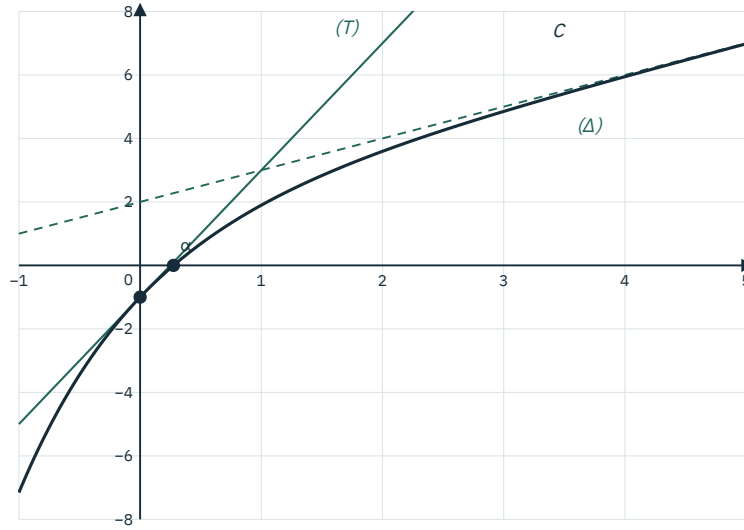
4

f مستمرة ومتزايدة تمامًا على $\mathbb{R}$ وصورتها $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α . جدول قيم:

0	0.2	0.27	0.28	0.3	1	x
-1.0000	-0.2562	-0.0201	0.0126	0.0775	1.8964	$f(x)$

$f(0.27) < 0 < f(0.28)$ إذن $0.27 < \alpha < 0.28$.

5



حل التمرين 7 — نمذجة تفريغ مكثف

1

$$U(0) = 12$$

0	2	4	6	t
12.000	4.415	1.624	0.597	$U(t)$

$$U(2) = 12e^{-1} \approx 4.415$$

2

$U'(t) = 12 \times (-0.5)e^{-0.5t} = -0.5U(t) < 0$ و $-0.5t \rightarrow -\infty$ ف $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 0$: يتفرغ المكثف تدريجيًا.

3

$$\frac{U(t+2)}{U(t)} = \frac{12e^{-0.5(t+2)}}{12e^{-0.5t}} = e^{-1} \approx 0.368$$

كل 2 ثانية يقسم التوتر على e تقريبًا (يبقى 36.8% منه) مهما كانت لحظة البداية.

4

U مستمرة ومتناقصة تمامًا على $[0; +\infty[$ وصورتها $]0; 12]$ التي تحوي 3 فللمعادلة $U(t) = 3$ حل وحيد t_0 . جدول قيم:

2	2.5	2.7	2.8	3	4	t
4.4146	3.4381	3.1109	2.9592	2.6776	1.6240	$U(t)$

$U(2.7) > 3 > U(2.8)$ و U متناقصة ف $2.7 < t_0 < 2.8$ أي بعد 2.7 ثانية تقريبًا.

حل التمرين 8 — المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

1

$$g' = f' \text{ ف } g = f - 2 \text{ و } g' = -3g \iff f' = -3(f - 2) = -3f + 6 \text{ فالتكافؤ محقق. } (E)$$

2

$$h'(x) = g'(x)e^{3x} + 3g(x)e^{3x} = (g'(x) + 3g(x))e^{3x} = 0 \text{ ف } h \text{ ثابتة وتساوي } h(0) = g(0) \text{ أي } g(x)e^{3x} = g(0) \text{ ومنه } g(x) = g(0)e^{-3x}.$$

3

$$\text{حلول } (E): f(x) = Ce^{-3x} + 2 \text{ حيث } C \text{ ثابت حقيقي. الشرط } f(0) = 5: C + 2 = 5 \text{ ف } C = 3 \text{ والحل هو } f(x) = 3e^{-3x} + 2.$$

4

$$f'(x) = -9e^{-3x} < 0 \text{ ف } f \text{ متناقصة تمامًا. عند } +\infty: e^{-3x} \rightarrow 0 \text{ ف } f \rightarrow 2 \text{ والمستقيم } y = 2 \text{ مقارب أفقي، و}$$

$$f(x) - 2 = 3e^{-3x} > 0 \text{ فالمنحنى فوقه. عند } -\infty: f \rightarrow +\infty.$$

$-\infty$	$+\infty$	x
—		$f'(x)$
		$f(x)$

حل التمرين 9 — عائلة منحنيات $f_a(x) = e^{ax} - ax$

1

$$f'_a(x) = ae^{ax} - a = a(e^{ax} - 1) \text{ و } a > 0 \text{ وإشارة } e^{ax} - 1 \text{ هي إشارة } ax \text{ أي إشارة } x. \text{ ف } f_a \text{ متناقصة على }]-\infty; 0] \text{ ومتزايدة على }]0; +\infty[\text{ وقيمتها الصغرى } f_a(0) = 1 \text{ إذن } f_a(x) \geq 1.$$

2

$$f_a(0) = 1 \text{ و } f'_a(0) = 0 \text{ فكل منحنى } (C_a) \text{ يمر بالنقطة } A(0; 1) \text{ ويقبل عندها المماس الأفقي } y = 1.$$

3

$$\text{عندما } x \rightarrow -\infty: e^{ax} \rightarrow 0 \text{ و } -ax \rightarrow +\infty \text{ (لأن } a > 0 \text{) ف } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty.$$

4

$$f_a(x) = \varphi(ax) \text{ مع } \varphi(t) = e^t - t \text{ و } \varphi'(t) = e^t - 1 \text{ فمتناقصة على }]-\infty; 0] \text{ ومتزايدة على }]0; +\infty[.$$

• إذا كان $0 < ax < a'x: x > 0$ و φ متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$ ف $\varphi(ax) < \varphi(a'x).$

- إذا كان $x < 0$: $a'x < ax < 0$ و φ متناقصة تمامًا على $]-\infty; 0]$ ف $\varphi(ax) < \varphi(a'x)$.
- في الحالتين $f_a(x) < f_{a'}(x)$: كلما كبر a كان المنحني (C_a) تحت المنحنيات ذات a الأكبر (ما عدا عند النقطة A).

حل التمرين 10 — الدالتان ch و sh

1

$$\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}(x) \text{ و } \text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}(x)$$

2

$$\begin{aligned} \text{sh}'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x) \text{ و } \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x) \\ \text{ch}^2 - \text{sh}^2 &= (\text{ch} - \text{sh})(\text{ch} + \text{sh}) \\ &= e^{-x} \times e^x = 1 \end{aligned}$$

3

$\text{sh}(x) > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x \iff x > 0$ وعليه $\text{ch}' = \text{sh}$ سالبة على $]-\infty; 0]$ وموجبة على $]0; +\infty[$. $\text{ch}(0) = 1$. النهايتان: $\text{ch}(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \rightarrow +\infty$ عند $+\infty$ ، وبما أنها زوجية فهي $+\infty$ عند $-\infty$ أيضًا.

$-\infty$	0	$+\infty$	x
—	0	+	$\text{ch}'(x)$
$+\infty$	1	$+\infty$	$\text{ch}(x)$

4

$\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x} > 0$ ف (C_{ch}) فوق (C_{sh}) على $\mathbb{R}$. وعند $+\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ فالمنحنيان متقاربان عند $+\infty$.