

سلسلة تمارين 2

العمليات على النهايات وحالات عدم التعيين والمقارنة والتركيب

الحالات الأربع لعدم التعيين: $+\infty - \infty$ و $0 \times \infty$ و $\frac{0}{\infty}$ و $\frac{\infty}{0}$. لرفعها نستعمل التبسيط أو إخراج الحد الغالب أو الضرب في المرافق.
المستوى: ★ تطبيق مباشر، ★★ متوسط، ★★★ يتطلب فكرة إضافية.

☆☆★

التمرين 1 — تطبيق قواعد المجموع والجداء

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(x^2 + 1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)(2 - x) \quad (4)$$

☆☆★

التمرين 2 — الضرب في المرافق

كل نهاية فيما يلي هي حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$. ارفعها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (3)$$

☆☆★

التمرين 3 — حالة عدم التعيين 0/0

احسب:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 4 — حالات ∞/∞ و $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$

احسب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 5 — الجذر التربيعي والإشارة

احسب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x}) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) \quad (2) \text{ (انتبه إلى إشارة } x \text{)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) \quad (3)$$

☆☆☆

التمرين 6 — النهايات بالمقارنة

باستعمال مبرهنات المقارنة (الحصري) احسب:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 2 \sin x}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2 + \cos x) \quad (4)$$

☆☆☆

التمرين 7 — نهاية دالة مركبة

احسب باستعمال نهاية دالة مركبة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{1}{x} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right) \quad (4)$$

★★★

التمرين 8 — دراسة دالة جذرية ومقاربيها المائلين

f دالة معرفة بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ و $\mathcal{C}_f$ منحنائها.

(1) عيّن مجموعة تعريف f .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) يبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0$. ماذا تستنتج؟ ادرس الوضع النسبي.

(4) يبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + (x + 1)] = 0$. ماذا تستنتج؟

☆☆☆

التمرين 9 — صواب أم خطأ؟

في كل حالة، قل هل العبارة صحيحة أم خاطئة مع التبرير (البرهان أو مثال مضاد):

(1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

(2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$.

(3) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على $]a; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(4) إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

حاول حل التمرين بنفسك أولاً

الحلول المفصلة

حل التمرين 1 — تطبيق قواعد المجموع والجداء

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ، مجموعهما: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ ، إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} \right) = +\infty$.

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ ، جداءهما: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(x^2 + 1) = -\infty$.

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) = +\infty$ ، جداءهما: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)(2 - x) = +\infty$.

حل التمرين 2 — الضرب في المرافق

فكرة الحل: نضرب ونقسم على المرافق $A + B$ لأن $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

1

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= 0 \text{ فالنهاية: } +\infty \text{ إلى } 0\end{aligned}$$

2

$$\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} = \frac{(x + 1) - x}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}$$

المقام يؤول إلى $+\infty$ فالنهاية 0.

3

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + x} - x &= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \quad (x > 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}\end{aligned}$$

عندما $x \rightarrow +\infty$: $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$ فالنهاية $\frac{1}{2}$.

حل التمرين 3 — حالة عدم التعيين 0/0

1

البسط والمقام ينعدمان عند 2 (حالة $\frac{0}{0}$). من أجل $x \neq 2$:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

إذن النهاية $2 + 2 = 4$.

2

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= \frac{x - 2}{x + 1} \quad (x \neq 1)\end{aligned}$$

النهاية $-\frac{1}{2} = \frac{1 - 2}{1 + 1}$.

3

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

النهاية $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

4

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} &= \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} \\ &= \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \sqrt{x+1}+2 \end{aligned}$$

النهاية $4 = \sqrt{4}+2$.

حل التمرين 4 — حالات ∞/∞ و $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$

1

$$\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ و $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \rightarrow 1$ فالنهاية 0.

2

$$\begin{aligned} x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right) &= x \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \\ &= x \times \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \end{aligned}$$

النهاية $\frac{1}{2}$.

3

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

البسط يؤول إلى -1 والمقام إلى 0^+ ، إذن النهاية $-\infty$.

4

$$\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$$

إذن النهاية $-\infty$.

حل التمرين 5 — الجذر التربيعي والإشارة

1

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 2x} &= \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} \\ &= \frac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

النهاية $\frac{2}{1+1} = 1$.

2

$$\begin{aligned} \text{من أجل } x < 0 : x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x \text{ إذن } \sqrt{x^2 + x} = -x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \\ \sqrt{x^2 + x} + x &= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} \\ &= \frac{x}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \end{aligned}$$

النهاية $-\frac{1}{2}$.

3

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + x} - 2x &= \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{x}{x\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

النهاية $\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.

حل التمرين 6 — النهايات بالمقارنة

1

من أجل كل x : $\sin x \geq -1$ إذن $x + \sin x \geq x - 1$. وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$.

2

من أجل $x > 0$: $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\pm \frac{1}{x} \right) = 0$ فبمبرهنة الحصر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

3

$-1 \leq \sin x \leq 1$ إذن $1 \leq 3 + 2 \sin x \leq 5$ ولأن $x^2 + 1 > 0$: $0 \leq \frac{3 + 2 \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{5}{x^2 + 1}$ وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2 + 1} = 0$ فالنهاية 0.

4

$2 + \cos x \geq 1$ إذن $x^2(2 + \cos x) \geq x^2$. وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ فالنهاية $+\infty$.

حل التمرين 7 — نهاية دالة مركبة

1

نضع $u(x) = \frac{2x+1}{x-3}$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$ و $\lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{u(x)} = \sqrt{2}$.

2

$\lim_{X \rightarrow 0} \cos X = \cos 0 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ فالنهاية 1.

3

$u(x) = x^2 - 1 \rightarrow 0^+$ عندما $x \rightarrow 1^+$ (لأن $x > 1$) ، و $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ فالنهاية $+\infty$.

4

$u(x) = \frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2 + \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ و $\cos$ مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ فالنهاية $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

حل التمرين 8 — دراسة دالة جذرية ومقاربيها المائلين

1

$$x^2 + 2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$$

$$\iff x \in]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$$

مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$.

2

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$.

3

لدينا $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ إذن:

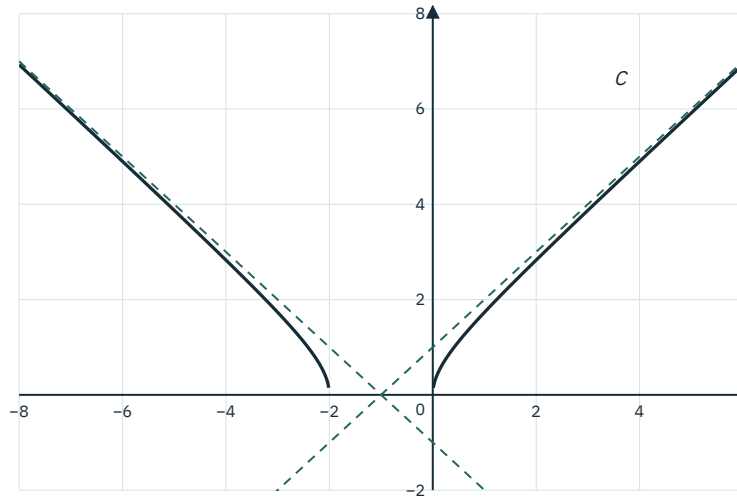
$$\begin{aligned} f(x) - (x+1) &= \frac{(x^2 + 2x) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x+1)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} \end{aligned}$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ المقام يؤول إلى $+\infty$ والنهاية 0. إذن المستقيم $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. ولأن المقام موجب من أجل $x \geq 0$ فإن $f(x) - (x+1) < 0$ المنحنى تحت هذا المستقيم.

4

$$\begin{aligned} f(x) + (x+1) &= \frac{(x^2 + 2x) - (x+1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - (x+1)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1} \end{aligned}$$

عندما $x \rightarrow -\infty$ المقام يؤول إلى $+\infty$ والنهاية 0. إذن المستقيم $y = -x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ (والمنحنى تحته أيضًا لأن المقام موجب).



حل التمرين 9 — صواب أم خطأ؟

1 خاطئة (حالة عدم التعيين $(\infty - \infty)$). مثال مضاد: $f(x) = x$ و $g(x) = x + 1$ تؤديان إلى $+\infty$ لكن $f(x) - g(x) = -1$ تؤول إلى $-1 \neq 0$.

2 خاطئة (حالة $0 \times \infty$). مثال مضاد: $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x$: $f(x)g(x) = 1$ تؤول إلى 1.

3 صحيحة (مبرهنة المقارنة): من أجل كل عدد A يوجد α بحيث $x > \alpha \Rightarrow f(x) > A$ ، وبما أن $g(x) \geq f(x)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ أيضًا، ف $g(x) > A$.

4 صحيحة: قاعدة نهاية مقلوب دالة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0$ و $f(x) \rightarrow +\infty$ عندما $x \rightarrow a$ ، فبالتركيب $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.