

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: جوان 2013

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(3; -2; -1)$ ، $B(5; -3; 2)$ ، $C(2; 3; 2)$ و $D(1; -5; -2)$.

- (1) بين أن النقط A و B و C تعين مستويا؛ نرمز له بالرمز (P) .
- (2) بين أن الشعاع $\vec{n}(2; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
- (3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد (P) .
ب) عين إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .
- (4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ، و λ العدد الحقيقي حيث: $\vec{AH} = \lambda \vec{AB}$.
أ) بين أن: $\lambda = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$.
ب) استنتج العدد الحقيقي λ و إحداثيات النقطة H ، ثم المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 + 6z + 17 = 0$.
- (2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A و B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A = -4$ و $z_B = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$.
- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) أ) عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .
ب) عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME}\| = 10\sqrt{2}$.
- (4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z + 4) = \frac{\pi}{4}$.
- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين المجموعة (Γ_2) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$$u_0 = e^2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$$

$$(v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } v_n = \frac{1}{2} \ln u_n + \frac{1}{2}$$

(1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الأول.

(2) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(4) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

(2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

(3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(2) أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) بيّن أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III - (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

(1) أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

(2) الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

(أ) بيّن أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

(ج) بيّن أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين $A(2; -5; 4)$ و $B(3; -4; 6)$

$$\text{و المستقيم } (\Delta) \text{ المعروف بالتمثيل الوسيطى التالي: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

- 1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B .
- ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .
- 2- (P) المستوي الذي يشمل (D) و يوازي (Δ) .
- برهن أن $\vec{n}(3; 1; -2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ، ثم عيّن معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
- 3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D) .
- أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D) .
- ب) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P) .

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2 + 2z + 4)(z + 5 - i\sqrt{3}) = 0$.
- 2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = -5 + i\sqrt{3}$.
- S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B .
- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثم عيّن العناصر المميزة له.
- 3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 2), (B; -1), (C; 1)\}$.
- ب) اكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

ج) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

- x و y عدنان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $11x + 7y = 1$.
- 1) أ) عيّن $(x_0; y_0)$ ؛ حل المعادلة (E) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = -1$.
- ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

$$2) \begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases} \text{ عدنان طبيعيان و } S \text{ العدد الذي يحقق:}$$

أ) بيّن أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) .

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

(3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2 .

عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

(1) ادرس تغيرات g .

(2) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + (x-1)e^x \geq 0$.

II - الدالة f معرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(1 - أ) بين أن f مستمرة على $[0; +\infty[$.

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 - أ) تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

III - n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0; +\infty[$.

2- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها.

5- أ) بين أنه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3; 0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

(ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي

وحيد α_n من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ) بالاعتماد على الجزء II؛ بين أنه، من أجل كل x من $]0; 1[$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

(ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

(ج) جد نهاية المتتالية (α_n) .